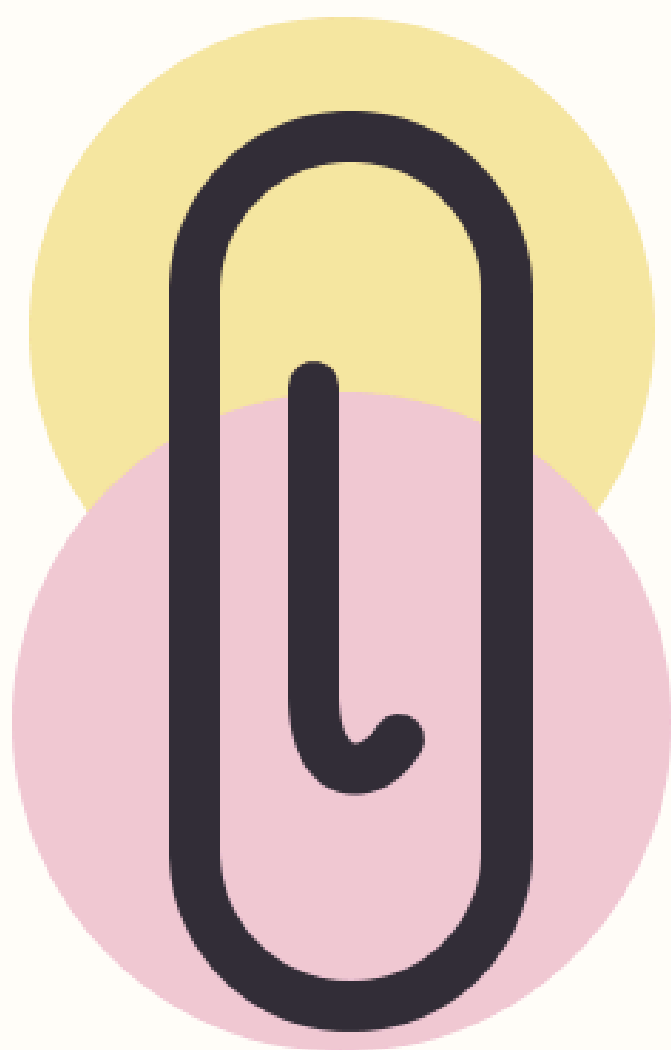






Polinomios y fracciones algebraicas.

Libro de estudio / Unidad 2 / Matemáticas B / 4.º ESO

Edición ampliada. Explicaciones progresivas, Ruffini visual, ejemplos completos y práctica organizada.

Esta guía está pensada para aprender, no solo para consultar fórmulas. Primero entenderás qué significa cada idea; después verás las cuentas completas y, por último, lo intentarás tú.

Si una palabra te resulta nueva

La explicamos cuando aparece y la conectamos con un ejemplo. En cada bloque, usa Aprende → Ejemplo → Practica. Si te atascas, vuelve al paso anterior y abre la pista antes de mirar la solución.

No necesitas terminar la unidad de una vez. Empieza por signos, distributiva y potencias. Continúa con división y Ruffini; después raíces y factorización; por último, fracciones. Los apartados de ampliación quedan dentro de desplegados para no interrumpir el aprendizaje básico.

Cómo leer la numeración

1.1 identifica un apartado del capítulo 1; 1.1.1 identifica una aclaración o un ejemplo dentro de ese apartado. Las instrucciones numeradas dentro de un ejemplo indican el orden de las acciones.

Índice de contenidos

Pulsa un apartado para abrirlo. La numeración cuenta la página de marca inicial. También puedes usar los marcadores de tu visor.

Guía de estudio	6
Antes de empezar	6
1. Leer y operar polinomios	7
1.1 Primero: ¿qué estás mirando?	7
1.2 Sumar: reúne piezas del mismo tipo	8
1.3 Restar: cambia todos los signos del paréntesis	8
1.4 Multiplicar: cada término visita a todos los del otro factor	8
1.5 Tres productos que reconocerás muchas veces	8
1.6 De una cuenta concreta a una identidad	9
1.7 Ejemplos resueltos	9
1.8 Práctica guiada	10
2. Dividir polinomios	11
2.1 Qué buscamos al dividir	11
2.2 El método se repite siempre	11
2.3 Por qué el algoritmo termina	12
2.4 Ejemplos resueltos	12
2.5 Práctica guiada	13
3. Ruffini y teorema del resto	14
3.1 Para qué sirve Ruffini	14
3.2 La decisión que va antes de la tabla	14
3.3 Después, prepara todos los coeficientes	14
3.4 El movimiento que se repite	14
3.5 Cómo leer el resultado	17
3.6 Calcular solo el resto: puedes ahorrar la tabla	17

3.7 La tabla también sirve para evaluar	18
3.8 Ejemplos resueltos	18
3.9 Práctica guiada	19
4. Raíces y búsqueda de candidatos	20
4.1 Una raíz es un valor, no una fórmula nueva	20
4.2 De la raíz al factor	20
4.3 Cómo buscar sin probar cualquier número	20
4.4 Una lista de candidatos no es una lista de raíces	21
4.5 Ejemplos resueltos	21
4.6 Práctica guiada	22
5. Factorizar con una estrategia	23
5.1 Qué cambia al factorizar	23
5.2 Una estrategia que evita empezar a ciegas	23
5.3 Factor común: repartir un mismo multiplicador	23
5.4 Diferencia de cuadrados	23
5.5 Agrupar: crear un factor común que antes no se veía	23
5.6 El conjunto de números cambia la respuesta	24
5.7 Ejemplos resueltos	24
5.8 Práctica guiada	25
6. Divisibilidad, MCD y MCM	26
6.1 Dividir exactamente significa ser un factor	26
6.2 MCD: lo que comparten los dos polinomios	26
6.3 MCM: lo necesario para contener a los dos	26
6.4 Cómo comprobar MCD y MCM sin desarrollarlos	27
6.5 Ejemplos resueltos	27
6.6 Práctica guiada	28
7. Fracciones algebraicas y restricciones	29

7.1 Una fracción con una casilla dentro	29
7.2 Busca los valores prohibidos antes de simplificar	29
7.3 Cancelar: quitar un factor repetido arriba y abajo	29
7.4 Una condición no desaparece por dejar de verla	29
7.5 Una expresión y su dominio forman una pareja	30
7.6 Ejemplos resueltos	30
7.7 Práctica guiada	31
8. Operar fracciones algebraicas	32
8.1 Las mismas operaciones de las fracciones numéricas	32
8.2 Sumar o restar, en cuatro movimientos	32
8.3 Multiplicar: factoriza y cancela antes de desarrollar	32
8.4 Dividir: da la vuelta a la segunda fracción	32
8.5 Comprueba si el resultado tiene sentido	33
8.6 Ejemplos resueltos	33
8.7 Práctica guiada	34
9. Conexiones y aplicación	35
9.1 Mapa de repaso	35
9.2 Juegos y retos	36
9.3 Proyecto: diseña un marco	37
9.4 Un paso más	38
9.5 Autoevaluación	39
9.6 Próximos pasos	40

Guía de estudio

1. Empieza por signos, términos semejantes y distributiva. Practica hasta poder explicar cada producto.
2. Aprende división larga y comprueba $\text{dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto}$.
3. Trabaja Ruffini con su secuencia visual; conecta resto, evaluación y raíces.
4. Elige una estrategia de factorización antes de hacer cuentas.
5. Calcula MCD y MCM con los factores visibles.
6. Termina con fracciones: restricciones, factorización, operación y comprobación.

Cómo utilizar la práctica

Nivel 1: inicia el procedimiento. Nivel 2: combina pasos y justifica. Nivel 3: trabaja con condiciones o más razonamiento. No pases de nivel por rapidez: comprueba que puedes explicar las decisiones.

Antes de empezar

- Simplifica $3x + 2x - x$.
- Calcula $(-2)^3$ y $(-2)^2$.
- Desarrolla $2(x - 3)$.
- Factoriza $x^2 - 9$.
- ¿Puedes dividir entre 0?

Comprueba tus bases

$4x$; -8 y 4 ; $2x - 6$; $(x - 3)(x + 3)$; no. Si fallas signos o distributiva, empieza por el bloque 1 y repite sus ejemplos antes de dividir.

1. Leer y operar polinomios

Objetivo: Identificar términos y grados, operar con signos y reconocer identidades.

1.1 Primero: ¿qué estás mirando?

Piensa en x como una casilla donde puedes poner un número. Un polinomio reúne varias operaciones con esa casilla. Por ejemplo, en $4x^3 - 2x + 7$, si eliges $x = 2$, obtienes $4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 + 7 = 35$. La misma expresión sirve para muchos valores de x .

Cada pieza separada por una suma o una resta es un **término**. En este ejemplo hay tres: $4x^3$, $-2x$ y 7 . El signo forma parte del término: el segundo no es $2x$, sino $-2x$.

Palabra	Qué significa	En $4x^3 - 2x + 7$
Coeficiente	Número que multiplica la parte con x .	4 y -2; el término constante tiene coeficiente 7.
Exponente	Cuántas veces se multiplica x por sí misma.	$x^3 = x \cdot x \cdot x$. En x el exponente es 1.
Término independiente	Pieza que no contiene x .	7. Su valor no depende de la casilla.
Grado	Mayor exponente que queda después de simplificar.	3.

$$P(x) = 4x^3 - 2x + 7$$

Grado: 3

Mayor exponente

Coeficiente líder: 4

Término constante: 7

No lleva x

$$P(0) = 7$$

Falta x^2

Su coeficiente es 0

Lista: 4, 0, -2, 7

Radiografía de un polinomio: grado, término independiente y coeficientes, incluidos los ceros.

Dos detalles que ayudan

x^2 significa $1x^2$ y $-x$ significa $-1x$. Si falta x^2 , su coeficiente es 0: $4x^3 - 2x + 7 = 4x^3 + 0x^2 - 2x + 7$.

1.2 Sumar: reúne piezas del mismo tipo

$3x^2$ y $5x^2$ son piezas del mismo tipo porque llevan exactamente x^2 . Solo sumas sus números: $3x^2 + 5x^2 = (3 + 5)x^2 = 8x^2$. En cambio, $3x^2$ y $5x$ no son del mismo tipo. No puedes juntarlos en un solo término.

1.3 Restar: cambia todos los signos del paréntesis

Restar un polinomio es sumar su opuesto. Para quitar el paréntesis de $-(x^2 + 4x - 6)$, cambia el signo de sus tres términos: $-x^2 - 4x + 6$. El último se vuelve positivo porque estás restando un número negativo.

1.4 Multiplicar: cada término visita a todos los del otro factor

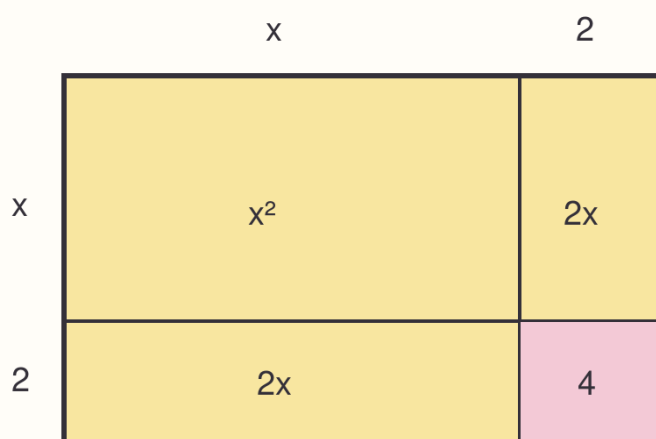
En $(x + 2)(x + 3)$ debes hacer cuatro productos: $x \cdot x$, $x \cdot 3$, $2 \cdot x$ y $2 \cdot 3$. Así obtienes $x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$. Dejar alguno fuera cambia el resultado.

1.5 Tres productos que reconocerás muchas veces

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



$$(x + 2)^2$$

$$= x^2 + 4x + 4$$

El término $4x$
no desaparece.

Modelo de áreas para $x > 0$: el cuadrado de lado $x + 2$ reúne x^2 , dos rectángulos $2x$ y un cuadrado de área 4. El dibujo es esquemático.

No necesitas aprenderlas como frases sin sentido: salen al multiplicar los dos paréntesis. En la pestaña Ejemplo veremos una de ellas término a término.

1.5.1 ¿Qué expresiones quedan fuera de los polinomios?

En un polinomio en x , los exponentes de x son enteros no negativos: 0, 1, 2, 3... Por eso $x^2 + 1$ sí es un polinomio, pero $1/x = x^{-1}$ y $\sqrt{x} = x^{1/2}$ no lo son. Una constante no nula, como 7, tiene grado 0. Al polinomio cero no le asignaremos grado en esta unidad.

1.5.2 Antes de indicar el grado, simplifica

En $5x^4 - 5x^4 + 2x$, las piezas con x^4 se anulan. Queda $2x$: el grado es 1. No basta con mirar el mayor exponente que aparecía antes de operar.

1.6 De una cuenta concreta a una identidad

Una igualdad como $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$ es una identidad: vale para todos los valores de x . Una ecuación, como $x^2 - 1 = 0$, te pide encontrar los valores que la hacen verdadera. Probar $x = 1$ puede detectar un fallo de cálculo, pero no demuestra una identidad.

1.6.1 Comprueba que lo has entendido

Explica con tus palabras la idea anterior y pon un ejemplo distinto. Si solo recuerdas la fórmula, vuelve al ejemplo resuelto y justifica por qué es válido cada paso.

1.7 Ejemplos resueltos

1.7.1 Una resta sin saltos

Vamos a calcular $(2x^2 - 3x + 1) - (x^2 + 4x - 6)$.

1. Quita el segundo paréntesis cambiando todos sus signos: $2x^2 - 3x + 1 - x^2 - 4x + 6$.
2. Junta las piezas con x^2 : $2x^2 - x^2 = x^2$.
3. Junta las piezas con x : $-3x - 4x = -7x$.
4. Junta los números: $1 + 6 = 7$.

Resultado: $x^2 - 7x + 7$

Comprueba un valor

Si $x = 1$, la expresión original vale $0 - (-1) = 1$. El resultado simplificado vale $1 - 7 + 7 = 1$. Coinciden. Esta prueba detecta errores, aunque probar un solo valor no demuestra una identidad para todos los valores.

1.7.2 Multiplicar dos paréntesis

Producto	Resultado
$3x \cdot x$	$3x^2$
$3x \cdot 5$	$15x$
$-2 \cdot x$	$-2x$
$-2 \cdot 5$	-10

Por tanto, $(3x - 2)(x + 5) = 3x^2 + 15x - 2x - 10 = 3x^2 + 13x - 10$.

1.7.3 Por qué hay un término central

$(2x + 1)^2$ significa $(2x + 1)(2x + 1)$. Los cuatro productos son $4x^2$, $2x$, $2x$ y 1 . Los dos términos centrales se suman, de modo que el resultado es $4x^2 + 4x + 1$. Escribir solo $4x^2 + 1$ deja dos productos sin contar.

1.8 Práctica guiada

Intenta estos ejercicios antes de consultar Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores son comunes al libro, la relación y la web.

E01 / Básico

Indica grado, coeficiente principal y término independiente de $-2x^4 + 3x^2 - 8$. Escribe todos los coeficientes en orden.

E02 / Básico

Desarrolla $(2x - 2)(x + 4)$ y calcula su valor en $x = -1$.

E09 / Reto

Desarrolla $(7x - 2)(x + 9)$ y calcula su valor en $x = -1$.

2. Dividir polinomios

Objetivo: Encontrar cociente y resto y comprobar la identidad de la división.

2.1 Qué buscamos al dividir

Recuerda una división de números: $17 = 5 \cdot 3 + 2$. El 17 es el dividendo, 5 el divisor, 3 el cociente y 2 el resto. En los polinomios buscamos exactamente la misma relación, cambiando números por expresiones.

$$\text{Dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto}$$

Llamaremos P al dividendo, D al divisor, C al cociente y R al resto. No son operaciones nuevas: son nombres para reconocer cada pieza.

2.2 El método se repite siempre

1. Ordena ambos polinomios desde la mayor potencia hasta la menor. Si falta una potencia, deja su hueco con coeficiente 0.
2. Divide el primer término que queda del dividendo entre el primer término del divisor. Esa será una pieza del cociente.
3. Multiplica TODO el divisor por esa pieza.
4. Resta TODO ese producto del polinomio que tenías. Usa paréntesis para no perder signos.
5. Repite con el resultado que queda.

1 · Divide los términos de mayor grado.



2 · Multiplica el divisor y resta toda la expresión.



3 · Repite hasta que el resto tenga menor grado.

División de polinomios: divide, multiplica y resta; termina cuando el grado del resto es menor que el del divisor.

¿Cuándo puedes parar?

Cuando el resto sea 0 o su grado sea menor que el del divisor. Si divides por $x^2 + 1$, el resto puede contener x o ser un número, pero no puede conservar x^2 .

Si el resto es 0, decimos que la división es **exacta**: el dividendo es un producto del divisor por el cociente. Si no, guarda también el resto; no lo borres.

2.2.1 Un paso pequeño con signos

Si tienes $x^3 - 2x + 5$ y restas $x^3 + x$, escribe $x^3 - 2x + 5 - (x^3 + x)$. Quitar ese paréntesis da $x^3 - 2x + 5 + 5 - x^3 - x = -3x + 5$. El $-2x$ se convierte en $-3x$ porque también restas otro x .

2.2.2 Cómo comprobar cualquier división

Multiplica divisor por cociente y suma el resto. Debes recuperar el dividendo original. Comprueba también que el resto tiene grado menor que el divisor. Las dos condiciones importan.

2.2.3 Si el dividendo es más pequeño

Si quieres dividir $x + 1$ entre $x^2 + 1$, el grado del dividendo es menor. No puedes sacar una primera pieza polinómica del cociente: $C = 0$ y $R = x + 1$.

2.3 Por qué el algoritmo termina

En cada paso eliminamos el término de mayor grado que queda. Por eso el grado va bajando. Al final el resto tiene grado menor que el divisor: ya no puedes eliminar su primer término usando un cociente polinómico. Esta condición distingue un resto terminado de una cuenta incompleta.

2.3.1 Comprueba que lo has entendido

Explica con tus palabras la idea anterior y pon un ejemplo distinto. Si solo recuerdas la fórmula, vuelve al ejemplo resuelto y justifica por qué es válido cada paso.

2.4 Ejemplos resueltos

2.4.1 Empieza con una división corta

Dividimos $x^3 - 2x + 5$ entre $x^2 + 1$.

1. Ordena: $x^3 + 0x^2 - 2x + 5$.
2. Divide los primeros términos: $x^3/x^2 = x$. Esa es la pieza del cociente.
3. Multiplica: $x(x^2 + 1) = x^3 + x$.
4. Resta: $(x^3 - 2x + 5) - (x^3 + x) = -3x + 5$.
5. Para: el resto tiene grado 1 y el divisor tiene grado 2.

Cociente: x · Resto: $-3x + 5$

Comprobación: $(x^2 + 1)x + (-3x + 5) = x^3 - 2x + 5$.

2.4.2 Repetimos hasta terminar

Divide $x^4 + 2x^3 - x + 3$ entre $x^2 + 1$. Añade $0x^2$ para ver el hueco.

Lo que queda antes del paso	Divide los primeros términos	Producto que restas	Lo que queda después
$x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x + 3$	$x^4/x^2 = x^2$	$x^4 + x^2$	$2x^3 - x^2 - x + 3$
$2x^3 - x^2 - x + 3$	$2x^3/x^2 = 2x$	$2x^3 + 2x$	$-x^2 - 3x + 3$
$-x^2 - 3x + 3$	$-x^2/x^2 = -1$	$-x^2 - 1$	$-3x + 4$

Las piezas del cociente son x^2 , $2x$ y -1 : $C = x^2 + 2x - 1$. El resto es $R = -3x + 4$.

Despliega la comprobación completa

$(x^2 + 1)(x^2 + 2x - 1) = x^4 + 2x^3 + 2x - 1$. Al sumar $-3x + 4$ queda $x^4 + 2x^3 - x + 3$, que es el dividendo original.

2.5 Práctica guiada

Intenta estos ejercicios antes de consultar Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores son comunes al libro, la relación y la web.

E10 / Básico

Divide $x^3 + x^2 - 4x - 4$ entre $x + 1$.

E11 / Básico

Divide $x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ entre $x^2 + 1$ y comprueba el resultado.

E18 / Reto

Divide $x^3 + 7x^2 - 8x + 9$ entre $x^2 + 1$ y comprueba el resultado.

3. Ruffini y teorema del resto

Objetivo: Dividir por $x - a$ y calcular restos mediante una sustitución.

3.1 Para qué sirve Ruffini

Ruffini es una forma rápida de dividir un polinomio cuando el divisor tiene la forma $x - a$. Hace las mismas cuentas que la división larga, pero guarda solo los coeficientes. Por ejemplo, dividir entre $x - 2$ permite usar Ruffini con el número 2.

3.2 La decisión que va antes de la tabla

Mira el divisor y piensa: «¿Qué valor de x haría que este divisor valiese cero?». Ese es el número que colocas a la izquierda.

Divisor	Número a la izquierda	Por qué
$x - 2$	2	$2 - 2 = 0$
$x + 3$	-3	$-3 + 3 = 0$
x	0	0 hace que el divisor valga 0.

Por qué cambia el signo

La forma de referencia es $x - a$. $x + 3$ es $x - (-3)$, por eso $a = -3$. No es una regla de cambiar signos sin motivo: estás buscando el valor que anula el divisor.

3.3 Después, prepara todos los coeficientes

Ordena el polinomio de mayor a menor grado. Si falta una potencia, escribe un 0 en su lugar. Para $x^3 - 5x + 2$, la lista es 1, 0, -5, 2; el 0 ocupa el lugar de x^2 . Si lo omites, cambias de polinomio y toda la tabla se desplaza.

3.4 El movimiento que se repite

1. Baja el primer coeficiente.
2. Multiplícalo por el número de la izquierda.
3. Coloca el producto debajo del siguiente coeficiente.
4. Suma esa columna y escribe el resultado abajo.
5. Repite: el nuevo resultado de abajo se multiplica por el número de la izquierda.

3.4.1 Ver el procedimiento visual completo: una casilla cada vez

Ruffini, casilla por casilla

Abre los pasos en orden. La casilla resaltada muestra el número nuevo. No hay prisa: el patrón es bajar una vez y después alternar multiplicar y sumar.

1 · Prepara el signo y los coeficientes

Divisor $x - 2 \rightarrow$ usamos $a = 2$. Escribe 1, -4, 1, 6: son los coeficientes de $x^3 - 4x^2 + x + 6$, en ese orden. La tabla tiene una columna por cada potencia, incluido el número final.

	x^3	x^2	x	Número final
a = 2	1	-4	1	6
Multiplicamos				
Sumamos				

2 · Baja el primer coeficiente

Copia el primer número, 1, en la fila inferior. No haces ninguna cuenta para obtenerlo: simplemente lo bajas.

	x^3	x^2	x	Número final
a = 2	1	-4	1	6
Multiplicamos				
Sumamos	1			

3 · Multiplica 1 por 2

Toma el número que acabas de escribir abajo: 1. Multiplícalo por $a = 2$: $1 \cdot 2 = 2$. Coloca ese 2 debajo del siguiente coeficiente, -4.

	x^3	x^2	x	Número final
a = 2	1	-4	1	6
Multiplicamos		2		
Sumamos	1			

4 · Suma la columna: $-4 + 2$

Ahora suma los dos números de esa columna: $-4 + 2 = -2$. Escribe -2 en la fila inferior. Ese será el número que usarás en la próxima multiplicación.

	x^3	x^2	x	Número final
a = 2	1	-4	1	6
Multiplicamos		2		
Sumamos	1	-2		

5 · Multiplica -2 por 2

El nuevo número de abajo es -2 . Multiplica $-2 \cdot 2 = -4$ y colócalo debajo del siguiente coeficiente, que es 1. No vuelvas al primer 1: siempre usas el último resultado de abajo.

	x^3	x^2	x	Número final
a = 2	1	-4	1	6
Multiplicamos		2	-4	
Sumamos	1	-2		

6 · Suma la columna: $1 + (-4)$

$1 + (-4) = -3$. Escribe -3 abajo. Sumar un número negativo equivale a restar: $1 - 4 = -3$.

	x^3	x^2	x	Número final
a = 2	1	-4	1	6
Multiplicamos		2	-4	
Sumamos	1	-2	-3	

7 · Multiplica -3 por 2

Multiplica el último resultado de abajo por 2: $-3 \cdot 2 = -6$. Colócalo debajo del último coeficiente, 6.

	x^3	x^2	x	Número final
a = 2	1	-4	1	6

	x^3	x^2	x	Número final
Multiplicamos		2	-4	-6
Sumamos	1	-2	-3	

8 · Suma la última columna

$6 + (-6) = 0$. Este último resultado tiene una función especial: es el resto de la división.

	x^3	x^2	x	Número final
a = 2	1	-4	1	6
Multiplicamos		2	-4	-6
Sumamos	1	-2	-3	0

9 · Convierte la fila inferior en una respuesta

La fila final es 1, -2, -3, 0. Separa el último número, 0: es el resto. Los anteriores, 1, -2 y -3, son los coeficientes del cociente. Como dividiste un polinomio de grado 3 entre uno de grado 1, el cociente empieza en x^2 .

$$C(x) = 1x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x - 3 \cdot R = 0$$

Por tanto, $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x^2 - 2x - 3)$. El resto 0 indica que la división es exacta.

3.5 Cómo leer el resultado

El último número de la fila inferior es el resto. Los anteriores son los coeficientes del cociente. El cociente tiene un grado menos que el polinomio que dividiste. Si el resto es 0, la división es exacta.

3.6 Calcular solo el resto: puedes ahorrar la tabla

Si solo te piden el resto al dividir P entre $x - a$, sustituye x por a en P . El número que obtengas es el resto. Esta regla se llama **teorema del resto**.

$$\text{Resto al dividir } P(x) \text{ entre } x - a = P(a)$$

3.6.1 ¿Por qué el resto es $P(a)$?

La división se escribe $P(x) = (x - a)C(x) + r$. Si eliges $x = a$, el factor $x - a$ se vuelve 0. Queda $P(a) = 0 \cdot C(a) + r = r$. La sustitución elimina el cociente y deja solo el resto.

3.6.2 Más adelante: un divisor como $2x - 1$

Primero escribe $2x - 1 = 2(x - 1/2)$. Aplica Ruffini con $1/2$ para dividir entre $x - 1/2$. Después divide el cociente obtenido entre 2, porque el divisor original era el doble. El resto no cambia. Domina primero divisores $x - a$; esta adaptación viene después.

Cuándo no usar esta tabla directamente

No uses Ruffini básica para dividir entre $x^2 + 1$: ese divisor tiene grado 2. En ese caso, utiliza la división de polinomios del bloque anterior.

3.7 La tabla también sirve para evaluar

Cada resultado inferior combina el anterior con el siguiente coeficiente. El último coincide con $P(a)$. Así, una tabla correcta da a la vez un cociente y el valor del polinomio en a . Si solo necesitas el resto, también puedes sustituir directamente en $P(a)$.

3.7.1 Comprueba que lo has entendido

Explica con tus palabras la idea anterior y pon un ejemplo distinto. Si solo recuerdas la fórmula, vuelve al ejemplo resuelto y justifica por qué es válido cada paso.

3.8 Ejemplos resueltos

3.8.1 Toda la tabla, con el proceso disponible

Divide $x^3 - 4x^2 + x + 6$ entre $x - 2$.

	x^3	x^2	x	Número final
a = 2	1	-4	1	6
Multiplicamos		2	-4	-6
Sumamos	1	-2	-3	0

La fila final da $C = x^2 - 2x - 3$ y resto 0. Si no sabes de dónde sale alguna casilla, abre el siguiente desplegable.

Consulta el recorrido visual completo del apartado 3.4.1 para reconstruir cada casilla.

3.8.2 Falta una potencia

Divide $x^3 - 5x + 2$ entre $x - 2$. La lista de coeficientes es 1, 0, -5, 2.

Acción	Cuenta	Nuevo número de abajo
Bajar	Se copia 1	1
Multiplicar y sumar	$1 \cdot 2 = 2$; $0 + 2 = 2$	2

Acción	Cuenta	Nuevo número de abajo
Multiplicar y sumar	$2 \cdot 2 = 4$; $-5 + 4 = -1$	-1
Multiplicar y sumar	$-1 \cdot 2 = -2$; $2 - 2 = 0$	0, que es el resto

El cociente es $x^2 + 2x - 1$. El resto es 0. El coeficiente 0 de x^2 era imprescindible para colocar bien las cuentas.

3.8.3 Un resto que no es cero

Busca el resto de $2x^3 - x^2 + 3x - 4$ entre $x + 1$. El divisor se anula en -1, así que calcula $P(-1)$.

1. $2(-1)^3 = 2 \cdot (-1) = -2$.

2. $-(-1)^2 = -1$. Primero se eleva al cuadrado, después se aplica el signo de fuera.

3. $3(-1) = -3$; el término final es -4.

4. Suma: $-2 - 1 - 3 - 4 = -10$.

Resto: -10. La división no es exacta.

3.9 Práctica guiada

Intenta estos ejercicios antes de consultar Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores son comunes al libro, la relación y la web.

E19 / Básico

Divide $x^3 - 5x + 2$ entre $x - 2$ usando Ruffini.

E20 / Básico

Usa Ruffini para dividir $x^3 - 8x + 9$ entre $x - 2$. Interpreta el resto con el teorema del resto.

E27 / Reto

Usa Ruffini para dividir $x^3 - 5x^2 - 23x + 69$ entre $x - 7$. Interpreta el resto con el teorema del resto.

4. Raíces y búsqueda de candidatos

Objetivo: Conectar $P(a) = 0$ con los factores y buscar raíces sin probar al azar.

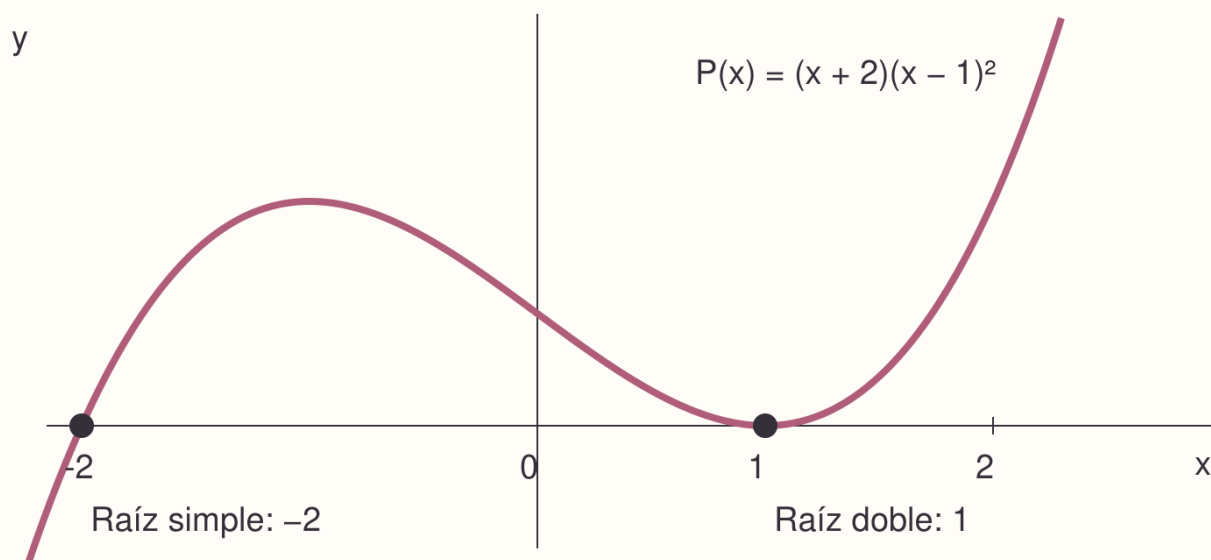
4.1 Una raíz es un valor, no una fórmula nueva

Una raíz de P es un número que, al ponerlo en la casilla x , hace que P valga 0. Para $P(x) = x^2 - 4$, $x = 2$ es raíz porque $2^2 - 4 = 0$. También lo es -2 , porque $(-2)^2 - 4 = 0$.

4.2 De la raíz al factor

Si $P(a) = 0$, dividir entre $x - a$ deja resto 0. Por eso $x - a$ es un factor de P : puedes escribir P como $(x - a)$ multiplicado por otro polinomio.

Raíz 2 $\rightarrow$ factor $x - 2$ · Raíz $-2 \rightarrow$ factor $x + 2$



Raíces en una gráfica: el polinomio cruza el eje en -2 y toca el eje en 1 , que es una raíz doble. Se muestra un tramo de la curva.

4.3 Cómo buscar sin probar cualquier número

Cuando todos los coeficientes son enteros y el término independiente no es 0, una posible raíz entera debe dividir al término independiente. Si este es 6, empieza por ± 1 , ± 2 , ± 3 y ± 6 . Después comprueba cada candidato sustituyéndolo o haciendo Ruffini.

Candidato no significa respuesta

Que 3 divida al término independiente solo hace que merezca la pena probarlo. Será raíz únicamente si $P(3) = 0$. Si $P(3)$ da otro número, lo descartas.

Si el término independiente es 0, normalmente puedes sacar x como factor: $x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$. Así reconoces primero la raíz 0 y después estudias lo que queda.

4.3.1 Raíz simple y raíz doble, con un ejemplo

En $(x - 2)^2(x + 3)$, la raíz 2 aparece dos veces porque hay dos factores $x - 2$. Se llama raíz doble. -3 aparece una vez y es simple. Hay dos raíces distintas, pero tres contando cuántas veces aparece cada una.

4.3.2 ¿Y las raíces que no son enteras?

No encontrar raíces enteras no significa que no existan raíces. $x^2 - 3$ tiene raíces $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. También puede haber fracciones: $2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$ tiene raíces $-1/2$ y 2. Para buscar candidatos racionales p/q en fracción irreducible, p divide al término independiente y q al coeficiente principal, si los coeficientes son enteros.

4.3.3 Más profundidad: sin raíces reales no siempre significa irreducible

$x^2 + 1$ no tiene raíces reales y no puede separarse en factores lineales reales. Pero $x^4 + 3x^2 + 2$ sí se separa como $(x^2 + 1)(x^2 + 2)$, aunque tampoco tenga raíces reales. Una raíz detecta un factor lineal; un polinomio también puede tener factores de grado 2.

4.4 Una lista de candidatos no es una lista de raíces

Si los coeficientes son enteros, una raíz entera debe dividir al término independiente. Esto permite descartar infinitos enteros, pero cada candidato aún debe comprobarse. Con coeficiente principal distinto de 1, las posibles raíces racionales reducidas p/q cumplen que p divide al término independiente y q al coeficiente principal.

4.4.1 Comprueba que lo has entendido

Explica con tus palabras la idea anterior y pon un ejemplo distinto. Si solo recuerdas la fórmula, vuelve al ejemplo resuelto y justifica por qué es válido cada paso.

4.5 Ejemplos resueltos

4.5.1 Ejemplo · Encontrar todas las raíces de un cúbico

Tenemos $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Como el número final es 6 y los coeficientes son enteros, preparamos $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ y ± 6 .

1. Prueba 1: $1 - 4 + 1 + 6 = 4$. No es raíz, porque no da 0.
2. Prueba 2: $8 - 16 + 2 + 6 = 0$. Sí es raíz. Por tanto, $x - 2$ es un factor.
3. Divide con Ruffini, como en el bloque anterior. El cociente es $x^2 - 2x - 3$.
4. Para separar el cuadrático, busca dos números que sumen -2 y cuyo producto sea -3. Son -3 y 1. Así $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$.
5. Escribe $P = (x - 2)(x - 3)(x + 1)$.

El producto vale 0 si alguno de sus factores vale 0. De ahí salen las raíces 2, 3 y -1. Comprueba, por ejemplo, $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$.

¿Por qué no seguimos probando candidatos en el cúbico?

Cuando encontramos un factor y dividimos, el problema se reduce. Ya sabemos que $P = (x - 2)C$. Las otras raíces se pueden buscar en el cociente C , que ahora tiene grado 2 y resulta más fácil.

4.5.2 Camino inverso: inventar un polinomio con raíces dadas

Si quieres raíces 4 y -2, prepara los factores $x - 4$ y $x + 2$. Su producto es $x^2 - 2x - 8$. Al sustituir 4 se anula el primer factor; al sustituir -2 se anula el segundo.

4.6 Práctica guiada

Intenta estos ejercicios antes de consultar Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores son comunes al libro, la relación y la web.

E28 / Básico

¿Es -2 raíz de $x^3 + x^2 - 4x - 4$?

E29 / Básico

Para $P(x) = (x - 2)^2(x + 4)$, indica las raíces, sus multiplicidades, el grado y el coeficiente principal. Describe qué hace la gráfica en cada raíz.

E36 / Reto

Para $P(x) = (x - 7)^2(x + 9)$, indica las raíces, sus multiplicidades, el grado y el coeficiente principal. Describe qué hace la gráfica en cada raíz.

5. Factorizar con una estrategia

Objetivo: Elegir factor común, identidades, agrupación o búsqueda de raíces.

5.1 Qué cambia al factorizar

Desarrollar convierte un producto en una suma: $(x - 2)(x + 2) \rightarrow x^2 - 4$. Factorizar recorre el camino contrario: $x^2 - 4 \rightarrow (x - 2)(x + 2)$. Ambas formas tienen el mismo valor, pero el producto permite ver raíces y cancelar factores en fracciones.

5.2 Una estrategia que evita empezar a ciegas

1. Mira si todos los términos comparten un número o una potencia de x . Si es así, saca ese factor común.
2. Mira si queda una diferencia de cuadrados o un cuadrado perfecto.
3. Si hay cuatro términos, prueba a agruparlos de dos en dos para conseguir un factor repetido.
4. Si no reconoces un patrón, busca una raíz y divide con Ruffini.
5. Si llegas a un cuadrático, busca sus raíces y escribe sus factores.

5.3 Factor común: repartir un mismo multiplicador

En $6x^3 - 12x^2$, los dos términos contienen $6x^2$. Dividir cada término entre él deja x y -2 . Por eso $6x^3 - 12x^2 = 6x^2(x - 2)$. Puedes comprobarlo repartiendo de nuevo $6x^2$.

5.4 Diferencia de cuadrados

$x^2 - 16$ es $x^2 - 4^2$. Tiene la forma $a^2 - b^2$, así que se convierte en $(x - 4)(x + 4)$. La suma $x^2 + 16$ no sigue esa regla.

5.5 Agrupar: crear un factor común que antes no se veía

En $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$, el primer par aporta $x^2(x + 2)$ y el segundo $3(x + 2)$. Ahora ambos contienen $x + 2$. Sacarlo da $(x + 2)(x^2 + 3)$.

5.5.1 Un cuadrático: cómo encontrar sus raíces y escribir los factores

Para $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, identifica los tres coeficientes, con sus signos. Calcula $\Delta = b^2 - 4ac$. Si Δ es no negativo, las raíces se obtienen con esta fórmula:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

El símbolo $\pm$ te pide hacer dos cuentas: una sumando $\sqrt{\Delta}$ y otra restándolo. Si $\Delta > 0$, salen dos raíces distintas y escribes $a(x - r_1)(x - r_2)$. Si $\Delta = 0$, las dos cuentas dan la misma raíz y queda $a(x - r)^2$. Si $\Delta < 0$, la raíz cuadrada no existe en los reales y no hay factores lineales reales. Mira la sustitución completa en la pestaña Ejemplo.

No pierdas el número que multiplica todo

$2x^2 - 5x + 2$ tiene raíces 2 y $1/2$. Su factorización es $2(x - 2)(x - 1/2)$, no solo el producto de los dos paréntesis. El coeficiente principal 2 debe conservarse.

5.5.2 Ampliación: suma y diferencia de cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Por ejemplo, $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. Comprueba el producto distribuyendo; no es una diferencia de cuadrados.

5.6 El conjunto de números cambia la respuesta

$x^2 - 2$ no tiene raíces racionales, pero sí raíces reales $\pm\sqrt{2}$. En $\mathbb{R}$ se factoriza como $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Por el contrario, $x^2 + 2$ no tiene raíces reales: x^2 nunca es negativo. Decir «no se puede factorizar» necesita indicar en qué conjunto trabajas.

5.6.1 Comprueba que lo has entendido

Explica con tus palabras la idea anterior y pon un ejemplo distinto. Si solo recuerdas la fórmula, vuelve al ejemplo resuelto y justifica por qué es válido cada paso.

5.7 Ejemplos resueltos

5.7.1 Dos decisiones, en orden

Factoriza $2x^4 - 8x^2$.

1. Los dos términos contienen $2x^2$. Sácalo: $2x^2(x^2 - 4)$.
2. Lo que queda es $x^2 - 2^2$. Usa diferencia de cuadrados: $(x - 2)(x + 2)$.
3. Resultado: $2x^2(x - 2)(x + 2)$.
4. Para hallar raíces, iguala los factores con x a cero: 0, 2 y -2. La raíz 0 es doble porque aparece x^2 . El factor constante 2 no da una raíz.

5.7.2 Un cuadrático explicado

Factoriza $2x^2 - 5x + 2$. Aquí $a = 2$, $b = -5$ y $c = 2$.

1. Calcula $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$.

2. Sustituye en $r = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$. Como $b = -5$, $-b = 5$; $\sqrt{9} = 3$ y $2a = 4$. Así las dos cuentas son $[5 + 3]/4 = 2$ y $[5 - 3]/4 = 1/2$.

3. Conserva el coeficiente 2: $2(x - 2)(x - 1/2)$.

4. Si prefieres evitar la fracción, junta 2 con $x - 1/2$: $(x - 2)(2x - 1)$.

Comprueba: $(x - 2)(2x - 1) = 2x^2 - x - 4x + 2 = 2x^2 - 5x + 2$.

5.7.3 Agrupación con signos

$x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x - 1) - 4(x - 1)$. En el segundo par se saca -4 , porque $-4(x - 1) = -4x + 4$.

Ahora saca $x - 1$: $(x - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$.

5.8 Práctica guiada

Intenta estos ejercicios antes de consultar Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores son comunes al libro, la relación y la web.

E37 / Básico

Factoriza completamente $3x^3 - 27x$ y señala sus raíces.

E38 / Básico

Factoriza completamente en $\mathbb{R}$: $2 \cdot x^3 - 32 \cdot x$. Después obtiene sus raíces.

E45 / Reto

Factoriza completamente en $\mathbb{R}$: $7 \cdot x^3 - 567 \cdot x$. Después obtiene sus raíces.

6. Divisibilidad, MCD y MCM

Objetivo: Usar factores para reconocer divisores y preparar denominadores comunes.

6.1 Dividir exactamente significa ser un factor

Si $P = D \cdot C$ y no hay resto, D es un divisor de P . Por ejemplo, $x - 2$ divide a $x^2 - 4$ porque $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. En cambio, $x - 3$ no lo divide: al sustituir 3, el resto es $9 - 4 = 5$.

6.2 MCD: lo que comparten los dos polinomios

El máximo común divisor reúne las piezas que están en ambas factorizaciones. Si un factor aparece dos veces en uno y tres en otro, los dos comparten dos copias. Por eso eliges el menor exponente.

6.3 MCM: lo necesario para contener a los dos

El mínimo común múltiplo debe tener suficientes copias de cada factor para ser múltiplo de ambos. Si uno necesita dos copias y el otro tres, debes guardar tres. Por eso eliges el mayor exponente. Esto servirá para sumar fracciones con denominadores distintos.

$$A = (x - 1)^2(x + 2) \cdot B = (x - 1)(x + 2)^3$$

MCD

Factores comunes

Menor exponente

MCM

Todos los factores

Mayor exponente

Guía visual de MCD y MCM para polinomios factorizados. Usamos representantes mónicos: coeficiente principal 1.

Primero factoriza, después compara

Es difícil reconocer las piezas comunes si solo ves $x^2 - 1$ y $x^2 - 2x + 1$. Escríbelos como $(x - 1)(x + 1)$ y $(x - 1)^2$. Ahora las piezas compartidas quedan a la vista.

6.3.1 Qué quiere decir «mónico» aquí

Un polinomio mónico tiene coeficiente principal 1. Para evitar distintas respuestas que solo cambian por una constante no nula, daremos el MCD y el MCM en forma mónica. Por ejemplo, $x - 1$ y $2x - 2$ representan el mismo factor salvo un multiplicador constante; en nuestros resultados elegimos $x - 1$.

6.3.2 Si no comparten factores

Su MCD mónico es 1. Por ejemplo, $x - 1$ y $x + 1$ no comparten ningún factor no constante. Su MCM es el producto $(x - 1)(x + 1)$.

6.4 Cómo comprobar MCD y MCM sin desarrollarlos

El MCD debe dividir exactamente a los dos polinomios. Ambos deben dividir al MCM. Si utilizas representantes mónicos, además se cumple $\text{MCD}(A,B) \cdot \text{MCM}(A,B) = A \cdot B$ cuando A y B también son mónicos. Con otros coeficientes, puede aparecer un factor constante.

6.4.1 Comprueba que lo has entendido

Explica con tus palabras la idea anterior y pon un ejemplo distinto. Si solo recuerdas la fórmula, vuelve al ejemplo resuelto y justifica por qué es válido cada paso.

6.5 Ejemplos resueltos

6.5.1 Ejemplo · Contar cuántas copias de cada factor hay

Sean $A = (x - 1)^2(x + 2)$ y $B = (x - 1)(x + 2)^3$.

Factor	Copias en A	Copias en B	MCD: menor cantidad	MCM: mayor cantidad
$x - 1$	2	1	1	2
$x + 2$	1	3	1	3

El MCD toma una copia de cada factor: $(x - 1)(x + 2)$. El MCM toma dos copias de $x - 1$ y tres de $x + 2$: $(x - 1)^2(x + 2)^3$.

Comprueba por qué el MCD divide a los dos

$A/\text{MCD} = x - 1$ y $B/\text{MCD} = (x + 2)^2$. En los dos casos, al cancelar factores queda un polinomio. Esa es la divisibilidad que buscábamos.

6.5.2 Otro ejemplo · Hay que descubrir las piezas primero

1. $A = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

2. $B = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

3. Factor común: $x - 1$. Hay una copia en A y dos en B, así que el MCD usa una.

4. Para el MCM, guarda dos copias de $x - 1$ y también el factor $x + 1$.

$$\text{MCD} = x - 1 \cdot \text{MCM} = (x - 1)^2(x + 1)$$

6.6 Práctica guiada

Intenta estos ejercicios antes de consultar Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores son comunes al libro, la relación y la web.

E46 / Básico

Calcula MCD y MCM mónicos de $(x - 2)^3(x + 1)$ y $(x - 2)(x + 1)^2$.

E47 / Básico

Halla el MCD y el MCM mónicos de $A = (x - 2)^2(x + 4)$ y $B = (x - 2)(x + 4)^3$.

E54 / Reto

Halla el MCD y el MCM mónicos de $A = (x - 7)^2(x + 9)$ y $B = (x - 7)(x + 9)^3$.

THE OPEN FILE

7. Fracciones algebraicas y restricciones

Objetivo: Simplificar factores y conservar los valores excluidos del original.

7.1 Una fracción con una casilla dentro

Una fracción algebraica tiene polinomios arriba y abajo, como $(x + 3)/x$. Si pones $x = 2$, vale $5/2$. Si pones $x = 0$, el denominador vale 0 y no puedes calcularla.

El **dominio** es el conjunto de valores de x que sí puedes utilizar. Para $(x + 3)/x$, sirve cualquier número real excepto 0. Lo anotamos como $x \neq 0$. El símbolo $\neq$ significa «distinto de».

7.2 Busca los valores prohibidos antes de simplificar

En $(x^2 - 9)/(x^2 - 3x)$, el denominador es $x(x - 3)$. Ese producto vale 0 cuando $x = 0$ o $x = 3$. Por tanto, ambos valores están excluidos desde el principio.

7.3 Cancelar: quitar un factor repetido arriba y abajo

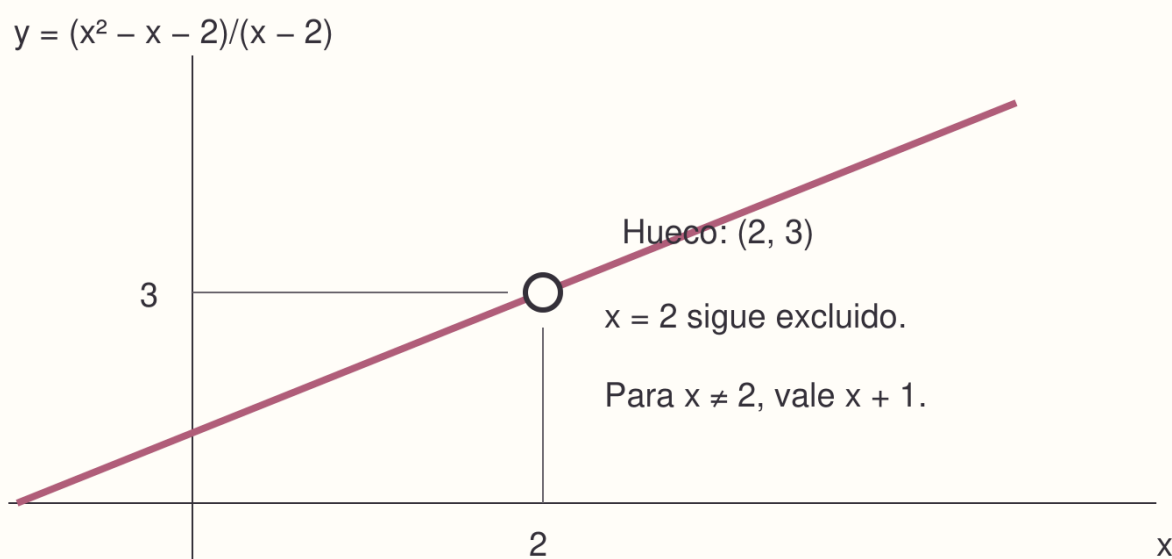
En una fracción de números, $6/9 = (3 \cdot 2)/(3 \cdot 3) = 2/3$. Se cancela el factor común 3. Con polinomios sucede lo mismo, pero primero debes escribir las expresiones como productos.

Cancelar no significa borrar letras iguales

Solo puedes cancelar un factor que multiplique a todo el numerador y a todo el denominador. En $(x + 1)/x$, la x de arriba es un sumando, no un factor de todo el numerador. No puedes tacharla.

7.4 Una condición no desaparece por dejar de verla

$(x^2 - x - 2)/(x - 2)$ se convierte en $(x - 2)(x + 1)/(x - 2)$. Para $x \neq 2$, cancela el factor común y queda $x + 1$. Pero $x = 2$ sigue sin estar permitido: en la fracción original produciría $0/0$.



Simplificar no rellena un hueco: $(x^2 - x - 2)/(x - 2)$ coincide con $x + 1$ solo para $x \neq 2$.

7.4.1 Ver la diferencia usando números concretos

Con $x = 3$, la fracción original vale $(9 - 3 - 2)/(3 - 2) = 4$ y $x + 1$ también vale 4. Con $x = 2$, $x + 1$ vale 3, pero la fracción original no existe. Por eso la respuesta correcta es $x + 1$, con $x \neq 2$.

7.4.2 Qué significa que dos fracciones sean equivalentes

Significa que dan el mismo valor para los valores permitidos que estás considerando. Si sus dominios originales son distintos, hay que explicarlo. Simplificar conserva los valores de la expresión donde estaba definida; no añade valores nuevos.

7.5 Una expresión y su dominio forman una pareja

$(x^2 - 1)/(x - 1)$ y $x + 1$ dan el mismo valor para $x \neq 1$. Como funciones con sus dominios naturales no son exactamente la misma: la primera tiene un hueco en 1. En una simplificación, escribe siempre la expresión nueva junto con las restricciones de la original.

7.5.1 Comprueba que lo has entendido

Explica con tus palabras la idea anterior y pon un ejemplo distinto. Si solo recuerdas la fórmula, vuelve al ejemplo resuelto y justifica por qué es válido cada paso.

7.6 Ejemplos resueltos

7.6.1 Simplificar y guardar las restricciones

Simplifica $(x^2 - 9)/(x^2 - 3x)$.

1. Factoriza el denominador: $x^2 - 3x = x(x - 3)$. No puedes usar 0 ni 3. Anota $x \neq 0, 3$.
2. Factoriza el numerador: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.
3. Escribe la fracción como $[(x - 3)(x + 3)]/[x(x - 3)]$.
4. El factor $x - 3$ aparece multiplicando arriba y abajo. En el dominio permitido, no es 0, así que puedes cancelarlo.
5. Queda $(x + 3)/x$. Conserva las dos restricciones, aunque ahora solo veas x en el denominador.

Resultado: $(x + 3)/x$, con $x \neq 0, 3$

7.6.2 Cancelar solo una copia

$(x^2 - 4)/(x^2 + 4x + 4) = [(x - 2)(x + 2)]/(x + 2)^2$. El denominador original se anula en -2, así que lo excluyes. Arriba hay una copia de $x + 2$ y abajo hay dos. Solo puedes cancelar una; queda $(x - 2)/(x + 2)$, con $x \neq -2$.

7.6.3 Cancelar un factor que estaba escondido

$(x^2 + x)/x$ sí permite cancelar, porque $x^2 + x = x(x + 1)$. Queda $[x(x + 1)]/x = x + 1$, con $x \neq 0$. La diferencia con $(x + 1)/x$ es que allí no hay una x multiplicando a todo el numerador.

7.7 Práctica guiada

Intenta estos ejercicios antes de consultar Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores son comunes al libro, la relación y la web.

E55 / Básico

Simplifica $(x^2 - 1)/(x^2 - x)$.

E56 / Básico

Simplifica $(x^2 - 4)/(x^2 - 2 \cdot x)$, indica las restricciones originales y explica si se puede usar $x = 2$ al final.

E62 / Reto

Simplifica $(x^2 - 36)/(x^2 - 6 \cdot x)$, indica las restricciones originales y explica si se puede usar $x = 6$ al final.

THE OPEN FILE

8. Operar fracciones algebraicas

Objetivo: Sumar, restar, multiplicar y dividir revisando el dominio completo.

8.1 Las mismas operaciones de las fracciones numéricas

Para sumar $1/2 + 1/3$ no sumas 2 y 3 en el denominador. Buscas un denominador común: $3/6 + 2/6 = 5/6$. Con expresiones algebraicas haces lo mismo.

8.2 Sumar o restar, en cuatro movimientos

1. Anota qué valores hacen 0 los denominadores originales.
2. Factoriza esos denominadores y encuentra uno que contenga todos los factores necesarios. El MCM suele evitar trabajo.
3. Transforma cada fracción multiplicando arriba y abajo por el factor que le falta.
4. Suma o resta los numeradores completos y conserva el denominador común. Después simplifica si se puede.

Por ejemplo, $1/x + 1/(x + 1)$ tiene denominador común $x(x + 1)$. La primera fracción necesita $x + 1$ arriba y abajo; la segunda necesita x . Así queda $[(x + 1) + x]/[x(x + 1)] = (2x + 1)/[x(x + 1)]$.

8.3 Multiplicar: factoriza y cancela antes de desarrollar

Multiplica numeradores entre sí y denominadores entre sí. Si ves factores iguales arriba y abajo, puedes cancelarlos. Suele ser más cómodo mantener productos que desarrollar todo y tener que factorizar después.

8.4 Dividir: da la vuelta a la segunda fracción

Como en $1/2 \div 3/4 = 1/2 \cdot 4/3$, una división de fracciones se transforma en multiplicar por la inversa. La inversa de $(x + 2)/(x - 1)$ es $(x - 1)/(x + 2)$. Pero la fracción que inviertes debe existir y no valer 0.

Tres comprobaciones al dividir A/B entre C/D

B no puede ser 0: la primera fracción debe existir. D no puede ser 0: la segunda también debe existir. C no puede ser 0: la segunda fracción no puede valer 0, porque estás dividiendo entre ella.

8.4.1 Un ejemplo numérico de la condición extra

En $[x/(x - 1)] \div [(x + 2)/(x - 1)]$, $x = 1$ está prohibido porque anula los denominadores. $x = -2$ también está prohibido: la segunda fracción valdría $0/(-3) = 0$, y no puedes dividir entre cero. Esa segunda prohibición no se ve mirando solo los denominadores.

8.4.2 Lista de control antes de dar la respuesta

- He apuntado las restricciones de los denominadores originales.
- Si hay división, también he excluido los ceros de la fracción divisora.
- He operado con factores o con un denominador común.
- Si había una resta, he cambiado todos los signos del numerador que restaba.
- He simplificado y he mantenido las condiciones iniciales.

8.5 Comprueba si el resultado tiene sentido

Después de operar, elige un número permitido y calcula la expresión inicial y la final: deben coincidir. Es una comprobación útil para encontrar errores de signo, aunque no demuestra por sí sola que la transformación sea correcta para todos los valores.

8.5.1 Comprueba que lo has entendido

Explica con tus palabras la idea anterior y pon un ejemplo distinto. Si solo recuerdas la fórmula, vuelve al ejemplo resuelto y justifica por qué es válido cada paso.

8.6 Ejemplos resueltos

8.6.1 Sumar sin saltarse los multiplicadores

Calcula $2/(x - 1) + 3/(x + 1)$.

1. Restricciones: $x \neq 1$ y $x \neq -1$.
2. Denominador común: $(x - 1)(x + 1)$.
3. A la primera fracción le falta $x + 1$: se convierte en $2(x + 1)/[(x - 1)(x + 1)]$.
4. A la segunda le falta $x - 1$: se convierte en $3(x - 1)/[(x - 1)(x + 1)]$.
5. Suma los numeradores: $2x + 2 + 3x - 3 = 5x - 1$.

$$(5x - 1)/(x^2 - 1), \text{ con } x \neq -1, 1$$

8.6.2 Producto con factores visibles

Calcula $[(x^2 - 4)/(x^2 - 1)] \cdot [(x + 1)/(x - 2)]$.

1. Los denominadores originales excluyen -1 , 1 y 2 .
2. Factoriza: $[(x - 2)(x + 2)]/[(x - 1)(x + 1)] \cdot [(x + 1)/(x - 2)]$.
3. En el producto completo, cancela una copia de $x - 2$ y una de $x + 1$ arriba y abajo.
4. Queda $(x + 2)/(x - 1)$, con $x \neq -1, 1, 2$.

8.6.3 Dividir conservando todas las condiciones

Calcula $[(x + 1)/(x - 2)] \div [(x^2 - 1)/(x - 2)]$.

1. Los dos denominadores excluyen 2.
2. El numerador del divisor es $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Se anula en 1 y -1: también los excluyes, para no dividir entre cero.
3. Invierte la segunda fracción: $[(x + 1)/(x - 2)] \cdot [(x - 2)/((x - 1)(x + 1))]$.
4. Cancela los factores repetidos $x - 2$ y $x + 1$.
5. Queda $1/(x - 1)$, con $x \neq -1, 1, 2$.

Resultado y dominio son la respuesta completa

Aunque $1/(x - 1)$ sí se pudiera calcular en -1 y 2, la operación original no. No recuperes esos valores al final.

8.7 Práctica guiada

Intenta estos ejercicios antes de consultar Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores son comunes al libro, la relación y la web.

E63 / Básico

Calcula $3/(x - 1) - 2/(x + 1)$.

E64 / Básico

Calcula $2/(x - 1) - 4/(x + 1)$. Indica todas las restricciones.

E70 / Reto

Calcula $6/(x - 1) - 8/(x + 1)$. Indica todas las restricciones.

9. Conexiones y aplicación

9.1 Mapa de repaso

Cuando necesites...	Haz esto
Sumar o restar	Agrupar semejantes; el menos cambia todos los signos.
Dividir	Ordena y completa ceros. Comprueba $P = DC + R$.
Usar Ruffini	Solo $x - a$ directamente; el número es a .
Calcular un resto	Sustituye a si divides entre $x - a$.
Buscar raíces	Prueba candidatos; no des por segura ninguna raíz.
Factorizar	Factor común, identidades, agrupación o Ruffini.
Hallar MCD/MCM	Factoriza y usa menor/mayor exponente; forma mónica.
Simplificar una fracción	Cancela factores y conserva exclusiones originales.
Dividir fracciones	Invierte el divisor, que debe existir y no valer cero.

Esquema específico: buscar raíces y factorizar

- Reduce y ordena el polinomio.
- Extrae factores comunes y reconoce identidades.
- Si procede, prepara candidatos enteros o racionales.
- Comprueba $P(a)$; si es 0, divide por $x - a$.
- Repite sobre el cociente y analiza el cuadrático final.
- Desarrolla el producto obtenido para verificarlo.

Esquema específico: fracciones con dominio

- Factoriza los denominadores originales.
- Anota todos sus ceros como valores excluidos.
- Si hay división, añade los ceros del numerador del divisor.
- Busca denominador común o cancela factores según la operación.
- Reduce y conserva las restricciones junto al resultado.

Diccionario rápido para no perderte

Palabra	En lenguaje sencillo
Coeficiente	El número que multiplica una potencia de x.
Grado	La mayor potencia que queda después de reducir.
Factor	Una pieza que multiplica a otra en un producto.
Raíz	Un valor de x que hace que el polinomio valga 0.
Resto	Lo que sobra después de dividir.
Dominio	Los valores de x que están permitidos.
Restricción	Un valor que debes excluir porque la expresión no se puede calcular.
Mónico	Con coeficiente principal 1.
Factorizar	Cambiar una suma por un producto equivalente.

9.2 Juegos y retos

Juego 1 · Empareja formas

Relaciona cada tarjeta A-D con su equivalente 1-4. Un punto por pareja y otro por explicar cómo comprobarla: máximo 8.

Tarjeta	Expresión
A	$x^2 - 4x + 4$
B	$x^2 - 25$
C	$x^3 + 3x^2 + 2x + 6$
D	$2x^2 - 8x$

- $1 \cdot 2x(x - 4)$
- $2 \cdot (x + 3)(x^2 + 2)$
- $3 \cdot (x - 2)^2$
- $4 \cdot (x - 5)(x + 5)$

Ver las parejas

A-3: cuadrado perfecto. B-4: diferencia de cuadrados. C-2: agrupación. D-1: factor común. Comprueba cada pareja desarrollando.

Juego 2 · Detective de errores

Estas cinco afirmaciones son falsas. Encuentra el error y corrígelo; dos puntos por corrección completa: máximo 10.

- $(x + 3)^2 = x^2 + 9$.
- Para dividir entre $x + 2$, Ruffini usa 2.
- Si 3 divide al término independiente, 3 siempre es raíz.
- $(x^2 - 1)/(x - 1) = x + 1$ para todos los reales.
- En una división de fracciones, solo hay que mirar los denominadores.

Abrir el informe

1: falta $6x$. 2: se usa -2 . 3: es un candidato, no una raíz garantizada. 4: solo para $x \neq 1$. 5: el divisor tampoco puede valer cero.

Juego 3 · Código de salida

Cada resultado es una cifra: A es el grado de $x^4 - x + 1$; B es el resto de $x^2 + 2$ entre $x - 1$; C es el valor de $x^2 - 1$ en $x = 3$; D es el número de raíces distintas de $(x - 2)^2$. Escribe ABCD.

Pista

Para B sustituye 1. Para D una raíz doble cuenta como una sola raíz distinta.

Revelar el código

A = 4, B = 3, C = 8, D = 1. Código: 4381.

9.3 Proyecto: diseña un marco

Diseñamos un marco cuadrado para una exposición. Su lado exterior mide $x + 4$ cm y el hueco interior mide x cm, con $x > 0$. Los datos son inventados para practicar.

- a) Escribe y desarrolla el área del material del marco.
- b) Factoriza ese polinomio de área.
- c) Calcula el área cuando $x = 6$.
- d) Divide el polinomio de área entre $x + 2$. ¿Cuál es el resto?
- e) Calcula la razón entre el área del marco y el perímetro exterior, y simplifica.
- f) Indica el dominio algebraico de la razón y el dominio físico del problema. Explica la diferencia.

Pistas del proyecto

Área: cuadrado grande menos pequeño. Perímetro exterior: $4(x + 4)$. En la división, aplica el teorema del resto con -2 .

Solución del proyecto

a) $A = (x + 4)^2 - x^2 = 8x + 16 \text{ cm}^2$. b) $8(x + 2)$. c) $A(6) = 64 \text{ cm}^2$. d) $A/(x + 2)$ tiene cociente 8 y resto 0; $A(-2) = 0$. e) $A/[4(x + 4)] = 2(x + 2)/(x + 4)$, con unidad cm. f) La razón algebraica original está definida para $x \neq -4$. El modelo físico exige $x > 0$. Usar $x = -2$ para comprobar el resto es válido algebraicamente, aunque no represente un marco real.

9.4 Un paso más

Ampliación A · Sin raíces y reducible

Factoriza $x^4 + 5x^2 + 4$ en los reales y explica por qué no tiene raíces reales.

Necesito una pista

Trata x^2 como una pieza y busca dos números cuyo producto sea 4 y suma 5.

Ver solución razonada

$(x^2 + 1)(x^2 + 4)$. Ambos factores son positivos para todo real x ; no hay raíces reales, pero el polinomio es reducible.

Ampliación B · Divisor con coeficiente

Divide $2x^2 + 3x + 1$ entre $2x + 1$.

Necesito una pista

Ruffini con $-1/2$ produce un cociente que debes dividir entre 2.

Ver solución razonada

$C = x + 1$, $R = 0$. Comprobación: $(2x + 1)(x + 1) = 2x^2 + 3x + 1$.

Ampliación C · Una igualdad con hueco

Simplifica $[1/(x - 1) - 1/(x + 1)] \div [2/(x^2 - 1)]$ y da el dominio.

Necesito una pista

La diferencia del primer paréntesis coincide con la fracción divisora.

Ver solución razonada

Resultado 1, con $x \neq -1, 1$. El divisor no puede ser cero, pero su numerador constante 2 nunca se anula en el dominio.

9.5 Autoevaluación

Haz estas diez preguntas antes de abrir las soluciones. Cuenta un punto por respuesta con procedimiento correcto; en las fracciones, el dominio forma parte de la respuesta.

1. Reduce $4x^2 - 3x + 2 - (x^2 + 2x - 1)$.

Comprobar

$$3x^2 - 5x + 3.$$

2. Desarrolla $(x - 4)^2$.

Comprobar

$$x^2 - 8x + 16.$$

3. Halla cociente y resto de $x^2 + x + 1$ entre $x + 1$.

Comprobar

$$C = x, R = 1.$$

4. Halla el resto de $x^3 - 2x + 4$ entre $x - 2$.

Comprobar

$$P(2) = 8 - 4 + 4 = 8.$$

5. ¿Es -1 raíz de $x^3 + 2x^2 - x - 2$?

Comprobar

$$\text{Sí: } -1 + 2 + 1 - 2 = 0.$$

6. Factoriza $x^2 - 5x + 6$.

Comprobar

$$(x - 2)(x - 3).$$

7. Da MCD y MCM mónicos de $x^2 - 1$ y $x - 1$.

Comprobar

$$\text{MCD} = x - 1; \text{MCM} = (x - 1)(x + 1).$$

8. Simplifica $(x^2 - 4)/(x - 2)$ con dominio.

Comprobar

$$x + 2, \text{ con } x \neq 2.$$

9. Calcula $1/x + 1/(x + 2)$.

Comprobar

$(2x + 2)/[x(x + 2)]$, con $x \neq 0, -2$.

10. Calcula $[1/(x - 1)] \div [x/(x - 1)]$ con dominio.

Comprobar

$1/x$, con $x \neq 1, 0$. El divisor se anula en 0.

Tu siguiente paso

0-4: repasa los bloques que has fallado. 5-7: repite esos ejercicios sin pistas. 8-10: intenta las ampliaciones y explica una simplificación sin olvidar sus restricciones. La puntuación es una orientación de estudio, no una nota oficial.

9.6 Próximos pasos

Completa los 70 ejercicios por niveles y realiza los diez modelos de examen. Anota el primer paso en el que te hayas equivocado, explica el motivo y vuelve a resolverlo sin mirar. Conserva las restricciones de las fracciones incluso si sus factores desaparecen al simplificar.

Contenido y actividades originales de The Open File. Material de práctica, sin carácter oficial.

THE OPEN FILE

