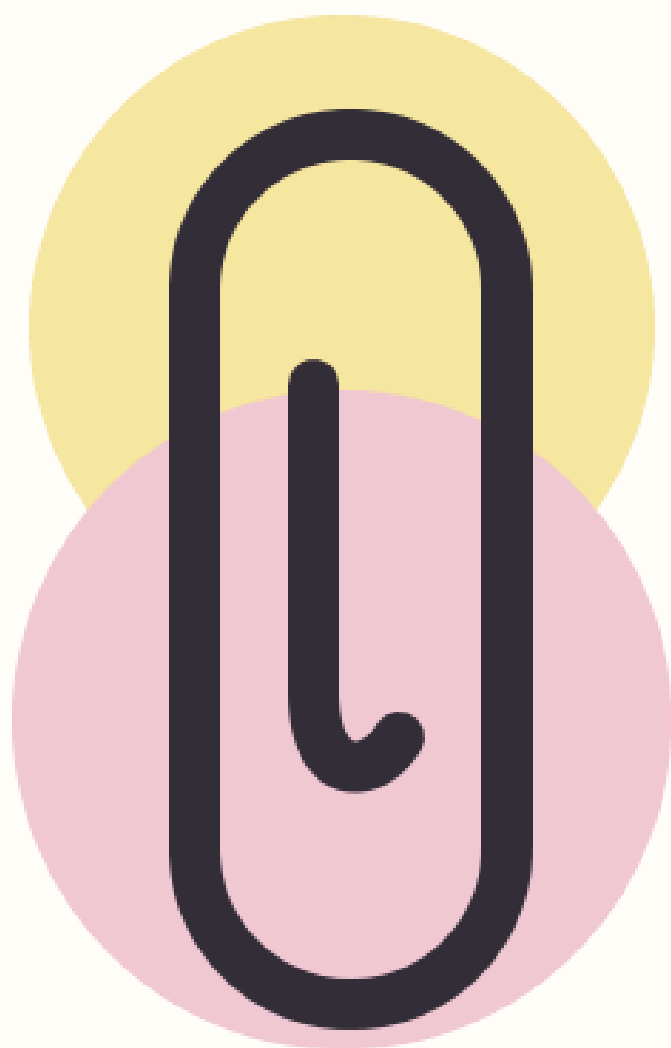






The
Open File

Los números reales.

Libro de estudio / Matemáticas B / 4.º ESO

Edición organizada por capítulos, explicaciones y ejemplos. El índice incluye páginas y enlaces; las soluciones de los ejercicios se consultan en su documento correspondiente.

Un número real puede describir una longitud, una temperatura, una medida aproximada o una escala muy grande. Esta unidad conecta esas situaciones con las herramientas para escribir, comparar y calcular sus valores.

Avanza en este orden: comprende la idea, sigue un ejemplo, intenta una actividad y comprueba tu razonamiento. No necesitas abrir la solución de inmediato: cada ejercicio tiene una pista separada. Los errores frecuentes explican por qué falla una operación, no solo qué resultado debe salir.

Estructura de lectura

Los números 1.1, 1.2... identifican explicaciones dentro del capítulo. Los números 1.4.1, 1.4.2... identifican ejemplos o aclaraciones dentro de un apartado. Las acciones de cada ejemplo se enumeran en el orden en que debes realizarlas.

Índice de contenidos

Las páginas indicadas cuentan también la página de marca inicial. Pulsa un título para abrir el apartado. El panel de marcadores del visor PDF permite navegar por la misma estructura.

Guía de estudio	6
Prueba inicial y punto de partida	6
1. Racionales e irracionales	7
1.1 Una pregunta para empezar: ¿se puede escribir como fracción?	7
1.2 Convertir un decimal en fracción, sin memorizar una receta vacía	7
1.3 Las raíces: primero comprueba si son exactas	7
1.4 Ejemplos resueltos	9
1.5 Esquema de repaso	9
1.6 Práctica del bloque	10
2. Los reales y la recta real	11
2.1 Los conjuntos encajan unos dentro de otros	11
2.2 Ordenar es decidir quién queda a la izquierda	12
2.3 Valor absoluto: distancia al cero	12
2.4 Ejemplos resueltos	13
2.5 Esquema de repaso	14
2.6 Práctica del bloque	14
3. Intervalos, semirrectas y entornos	15
3.1 Un intervalo reúne todos los números de un tramo	15
3.2 Semirrectas: cuando un lado no tiene límite	16
3.3 Unión e intersección: dos preguntas distintas	16
3.4 Entorno: estar cerca de un centro	16
3.5 Ejemplos resueltos	17

3.6 Esquema de repaso	17
3.7 Práctica del bloque	18
4. Potencias, raíces y radicales	19
4.1 Potencias: las reglas cuentan factores	19
4.2 Qué significa una raíz	19
4.3 Simplificar: sacar grupos completos	19
4.4 Sumar y multiplicar son operaciones diferentes	20
4.5 Racionalizar: cambiar la forma, no el valor	20
4.6 Ejemplos resueltos	20
4.7 Esquema de repaso	21
4.8 Práctica del bloque	22
5. Aproximaciones y control del error	23
5.1 Aproximar es reemplazar un valor por otro cercano	23
5.2 Truncar y redondear, con un criterio claro	23
5.3 Error absoluto: cuánto te has separado	24
5.4 Error relativo: compara el error con el tamaño del valor	24
5.5 Cotas: límites del error cuando no conoces todas las cifras	24
5.6 Ejemplos resueltos	24
5.7 Esquema de repaso	25
5.8 Práctica del bloque	26
6. Notación científica	27
6.1 Dos partes que hacen trabajos distintos	27
6.2 Convertir un decimal, contando el desplazamiento	27
6.3 Multiplicar y dividir	27
6.4 Sumar y restar: primero iguala la escala	27

6.5 Ejemplos resueltos	28
6.6 Esquema de repaso	29
6.7 Práctica del bloque	29
7. Logaritmos	30
7.1 Una operación que pregunta por el exponente	30
7.2 Calcula reconociendo una potencia	30
7.3 Las propiedades vienen de las reglas de las potencias	31
7.4 Base 10 y base e	31
7.5 Ejemplos resueltos	32
7.6 Esquema de repaso	32
7.7 Práctica del bloque	33
8. Conexiones y aplicación	34
8.1 Mapa de conexiones	34
8.2 Tres retos de razonamiento	34
8.3 Proyecto · Una etiqueta con precisión	35
8.4 Cómo seguir practicando	35

Guía de estudio

Momento	Qué hacer	Cómo comprobarlo
Antes	Haz la prueba inicial y localiza las dudas.	Explica un signo, una raíz y una potencia.
Durante	Trabaja un bloque y sus ejemplos.	Intenta dos ejercicios sin mirar.
Después	Elige práctica de nivel básico, consolidación o reto.	Revisa el paso donde te equivocaste.
Antes de evaluar	Haz un examen completo con sus condiciones.	Corrige con la solución y reparte de nuevo tu estudio.

Prueba inicial y punto de partida

Prueba inicial: seis comprobaciones

1. Escribe 0,25 como fracción.
2. Decide qué es mayor: -3 o -5.
3. Calcula $2^3 \cdot 2^2$.
4. Calcula $\sqrt{36}$.
5. Escribe 0,001 como potencia de 10.
6. Explica por qué no puedes dividir entre cero.

Comprueba y decide por dónde empezar

Respuestas: $1/4$; -3; $2^5 = 32$; 6; 10^{-3} . Dividir entre cero no define un cociente único compatible con la multiplicación. Si te cuestan fracciones y signos, revisa el primer y segundo bloque; si te cuestan potencias y raíces, ve despacio en el cuarto. Los logaritmos se entienden mejor después de dominar las potencias.

1. Racionales e irracionales

Objetivo: Clasificar números y distinguir un valor exacto de su aproximación.

1.1 Una pregunta para empezar: ¿se puede escribir como fracción?

Un número **racional** puede escribirse como a/b , donde a y b son enteros y b no es cero. Por ejemplo, 5 es racional porque $5 = 5/1$, y 0,125 es racional porque $0,125 = 125/1000 = 1/8$. La definición no exige que veas una barra de fracción en el enunciado: exige que puedas escribir una fracción que valga exactamente lo mismo.

Un número **irracional** es un número real que no puede escribirse como esa fracción de enteros. $\sqrt{2}$ y π son ejemplos. Sus decimales no terminan y no repiten para siempre un mismo bloque a partir de algún punto. Ver muchos decimales en la calculadora no basta para decidir: necesitas conocer el número o cómo se define su desarrollo decimal.

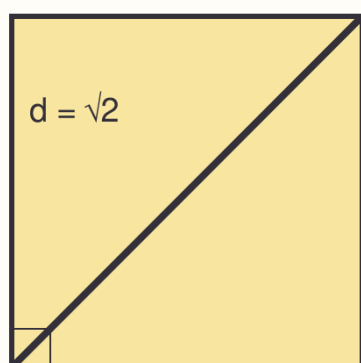
Decimal	Cómo es	Qué puedes concluir
Exacto: 0,125	Tiene un número finito de cifras decimales.	Es racional: $1/8$.
Periódico puro: 0,272727...	El bloque 27 se repite desde el primer decimal.	Es racional: $27/99 = 3/11$.
Periódico mixto: 0,1666...	El 1 inicial no se repite; después se repite el 6.	Es racional: $1/6$.
Infinito no periódico: $\sqrt{2}$	No acaba ni termina repitiendo un bloque.	Es irracional.

1.2 Convertir un decimal en fracción, sin memorizar una receta vacía

Con un decimal exacto, quita la coma y divide entre 10, 100, 1000... según el número de cifras decimales. Después simplifica. Con un periódico, la idea es desplazar las cifras y restar dos expresiones cuyo período coincida. En los ejemplos verás por qué funciona.

1.3 Las raíces: primero comprueba si son exactas

$\sqrt{49} = 7$, así que es racional. $\sqrt{50}$ no es una raíz entera y es irracional. Para la raíz cuadrada de un entero no negativo, basta comprobar si el número es un cuadrado perfecto: 0, 1, 4, 9, 16, 25... Para una raíz cúbica de un entero, busca un cubo perfecto: 1, 8, 27, 64... No apliques la regla del cuadrado a todos los índices.



1 unidad

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d^2 = 2$$

$$d = \sqrt{2} \approx 1,4142$$

1 unidad

La diagonal de un cuadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$: una longitud exacta que no es una fracción.

Exacto no significa que tenga pocos decimales

$\sqrt{2}$ es una forma exacta de escribir el número. 1,4142 es una aproximación racional. Escribe $\sqrt{2} \approx 1,4142$; escribir $\sqrt{2} = 1,4142$ afirma una igualdad que no es exacta.

1.3.1 Por qué $\sqrt{2}$ es irracional, explicado paso a paso

1. Supón que $\sqrt{2} = a/b$ es una fracción que ya no se puede simplificar.
2. Al elevar al cuadrado: $2 = a^2/b^2$; por tanto, $a^2 = 2b^2$.
3. a^2 es par. Si a fuera impar, su cuadrado sería impar; por eso a también es par.
4. Escribe $a = 2k$. Sustituyendo: $4k^2 = 2b^2$, luego $b^2 = 2k^2$.
5. Por el mismo motivo, b es par.
6. Entonces a y b son ambos divisibles entre 2: la fracción se podía simplificar. Esto contradice cómo la elegimos. No puede existir esa fracción.

1.3.2 Una suma de irracionales puede ser racional

$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$. También $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$. No clasifiques una operación mirando solo el tipo de sus piezas: calcula o simplifica el resultado. En cambio, un racional más un irracional es irracional: si la suma fuera racional, al restar el racional inicial el otro también lo sería.

1.4 Ejemplos resueltos

1.4.1 Decimal exacto

1. 0,375 tiene tres cifras decimales: $0,375 = 375/1000$.
2. Divide numerador y denominador entre 125: $375/1000 = 3/8$.
3. Comprueba: $3 \div 8 = 0,375$.

1.4.2 Periódico puro

Vamos a convertir $0,272727\dots$ en fracción. Los puntos indican que el bloque 27 sigue repitiéndose.

1. Llama x al número: $x = 0,272727\dots$
2. Como el período tiene dos cifras, multiplica por 100: $100x = 27,272727\dots$
3. Resta las dos igualdades: $100x - x = 27$. La parte decimal se cancela.
4. $99x = 27$; por tanto, $x = 27/99 = 3/11$.

1.4.3 Periódico mixto

1. $x = 0,1666\dots$
2. $10x = 1,666\dots$ y $100x = 16,666\dots$
3. Resta: $100x - 10x = 15$.
4. $90x = 15$; $x = 15/90 = 1/6$.

1.4.4 Clasificación con una trampa

π es irracional; 3,1416 es racional, porque es un decimal finito. $\sqrt{81} = 9$ es racional; $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ es irracional. Las expresiones distintas pueden representar el mismo número: $\sqrt{81}$ y 9 deben recibir la misma clasificación.

1.5 Esquema de repaso

- Decimal finito o periódico $\rightarrow$ racional.
- Raíz de entero: comprueba una potencia perfecta del índice correcto.
- Exacto: $\sqrt{2}$. Aproximado: 1,4142.
- Para clasificar una operación, simplifica su resultado.

1.6 Práctica del bloque

Intenta primero y comprueba después en Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores E01-E70 coinciden con la relación completa.

E01 / Básico

Clasifica -6 , $0,125$, $\sqrt{49}$ y $\sqrt{7}$ como racionales o irracionales. Simplifica antes cuando se pueda.

E04 / Consolidación

Convierte $0,454545\dots$ (período 45) en una fracción irreducible.

E06 / Consolidación

Simplifica y clasifica $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$ y $\sqrt{5} + (-\sqrt{5})$.

E09 / Reto

Explica por qué $2 + \sqrt{3}$ es irracional.

THE OPEN FILE

2. Los reales y la recta real

Objetivo: Ordenar valores, utilizar el valor absoluto y relacionar los conjuntos numéricos.

2.1 Los conjuntos encajan unos dentro de otros

Los naturales sirven para contar; los enteros añaden los negativos; los racionales añaden todas las fracciones de enteros; los reales incluyen los racionales y los irracionales. Usaremos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Si tu clase reserva $\mathbb{N}$ para empezar en 1, indícalo al clasificar el cero: es una convención, no un cambio de valor.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Pertenecer a un conjunto pequeño implica pertenecer a los que lo contienen. El 4 es natural, entero, racional y real. Si un ejercicio pide el conjunto más pequeño, responde $\mathbb{N}$; si pide todos, escribe los cuatro. Un irracional es real, pero no pertenece a $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$ · Todos los reales

$\mathbb{Q}$ · Racionales: $3/4$, -2 , $0,333\dots$ periódico

$\mathbb{Z}$ · Enteros: $\dots$, -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , $\dots$

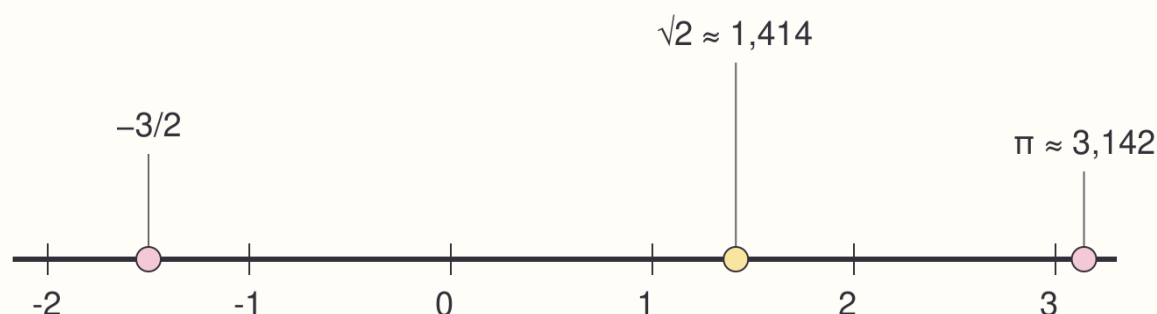
$\mathbb{N}$ · Naturales: 0 , 1 , 2 , 3 , $\dots$

Irracionales

$\sqrt{2}$ · π · e

No son fracciones

Mapa de conjuntos: $\mathbb{N}$ está dentro de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ dentro de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$. Los irracionales son reales fuera de $\mathbb{Q}$.



Recta real con escala uniforme. Las posiciones de $\sqrt{2}$ y π se muestran aproximadas; $-3/2 = -1,5$ es exacto.

2.2 Ordenar es decidir quién queda a la izquierda

En la recta real los números aumentan hacia la derecha. -5 es menor que -2 porque queda más a la izquierda. Entre negativos, un valor absoluto más grande significa que el número está más lejos del cero hacia la izquierda.

1. Simplifica las expresiones cuando sea posible.
2. Compara fracciones con un denominador común o utiliza aproximaciones suficientes.
3. Coloca primero los negativos; después cero y positivos.
4. Escribe el orden con $<$, de menor a mayor.

Para comparar raíces de números no negativos puedes comparar sus radicandos: como $2 < 3$, también $\sqrt{2} < \sqrt{3}$. Para decidir si $\sqrt{10}$ supera a 3, observa que $3^2 = 9 < 10$, por tanto $\sqrt{10} > 3$. Al cuadrar para comparar debes controlar el signo: no sirve tratar dos números negativos como si fueran positivos.

2.3 Valor absoluto: distancia al cero

$$|a| = \text{distancia de } a \text{ al } 0$$

Una distancia no es negativa: $|5| = 5$, $|-5| = 5$ y $|0| = 0$. La distancia entre dos números a y b es $|a - b|$. Puedes restar en cualquiera de los dos órdenes porque el valor absoluto elimina el signo del resultado.

2.3.1 ¿Por qué $\sqrt{x^2}$ es $|x|$ y no siempre x ?

La raíz cuadrada principal devuelve un resultado no negativo. Si $x = -3$, entonces $\sqrt{x^2} = \sqrt{9} = 3$, mientras x vale -3 . La expresión que sirve para x positivo y negativo es $|x|$. Por eso $\sqrt{x^2} = |x|$ para todo x real.

2.3.2 Propiedades básicas y límites de las reglas

- Sumar el mismo real a ambos lados mantiene el orden.
- Multiplicar o dividir por un número positivo mantiene el orden.
- Multiplicar o dividir por un negativo invierte el signo: si $2 < 5$, entonces $-2 > -5$.
- Entre dos reales diferentes siempre hay otros reales. No existe el siguiente real inmediatamente después de 1.

2.4 Ejemplos resueltos

2.4.1 Ordenar expresiones diferentes

Ordena $-\sqrt{5}$, -2 , $7/5$ y $\sqrt{2}$.

1. $\sqrt{5} \approx 2,236$, de modo que $-\sqrt{5} \approx -2,236$: queda antes que -2 .
2. $7/5 = 1,4$ y $\sqrt{2} \approx 1,4142$: la fracción queda antes que $\sqrt{2}$.
3. Resultado: $-\sqrt{5} < -2 < 7/5 < \sqrt{2}$.
4. La aproximación es suficiente aquí porque los valores quedan separados. Si fueran demasiado cercanos, necesitaríamos más precisión o una comparación exacta.

2.4.2 Distancia entre dos puntos

1. Queremos la distancia entre -3 y 5 .
2. Resta: $5 - (-3) = 8$.
3. Toma valor absoluto: $|8| = 8$.
4. En la recta recorres 3 unidades hasta cero y otras 5 hasta 5: $3 + 5 = 8$.

2.4.3 No te olvides del signo negativo

De $x < 3$, al multiplicar por -2 obtenemos $-2x > -6$. Comprueba con $x = 1$: $-2 > -6$. Mantener el signo $<$ daría una afirmación falsa.

2.5 Esquema de repaso

- Pregunta si se pide un conjunto o todos los conjuntos.
- En la recta, mayor significa más a la derecha.
- $|a|$ nunca es negativo; distancia entre a y $b = |a - b|$.
- Al multiplicar una desigualdad por un negativo, invierte el signo.

2.6 Práctica del bloque

Intenta primero y comprueba después en Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores E01-E70 coinciden con la relación completa.

E11 / Básico

Indica el conjunto más pequeño entre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ para 0, -4, $2/3$ y $\sqrt{3}$. Usa $\mathbb{N}$ con cero.

E14 / Consolidación

Calcula la distancia entre -4 y 7.

E16 / Consolidación

Escribe dos racionales distintos que estén entre $1/3$ y $1/2$.

E19 / Reto

¿Hay un siguiente número real inmediatamente después de 2? Explica con un punto intermedio.

3. Intervalos, semirrectas y entornos

Objetivo: Traducir entre desigualdades, intervalos, dibujos y condiciones de distancia.

3.1 Un intervalo reúne todos los números de un tramo

La condición $2 < x < 5$ no pide un único valor: incluye todos los reales entre 2 y 5, sin los extremos. Se escribe $(2, 5)$. Cada extremo tiene una decisión independiente: ¿entra o no entra?

Condición	Notación	Extremos
$a < x < b$	(a, b)	No entra ninguno.
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	Entran ambos.
$a \leq x < b$	$[a, b)$	Entra a; no entra b.
$a < x \leq b$	$(a, b]$	No entra a; entra b.

En un dibujo, un círculo vacío significa que el extremo no entra; un círculo lleno significa que entra. Algunas clases usan $]a, b[$ para el abierto: representa lo mismo que (a, b) .

$$-1 < x < 3$$



$$-1 \leq x \leq 3$$



$$-1 \leq x < 3$$



Círculo vacío: extremo excluido. Círculo lleno: extremo incluido. Tres intervalos con los mismos extremos.

3.2 Semirrectas: cuando un lado no tiene límite

Condición	Intervalo
$x \geq 3$	$[3, +\infty)$
$x < -1$	$(-\infty, -1)$
Cualquier real	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

El infinito no es un extremo que puedas incluir

∞ no es un número real. Por eso siempre lleva paréntesis, incluso si el otro extremo tiene corchete.

3.3 Unión e intersección: dos preguntas distintas

La **unión**, $A \cup B$, recoge los números que están en A o en B, incluyendo los que están en ambos. La **intersección**, $A \cap B$, recoge solo los que cumplen las dos condiciones a la vez. Dibuja ambos conjuntos en líneas paralelas si te cuesta ver dónde coinciden.

3.4 Entorno: estar cerca de un centro

El entorno abierto de centro c y radio $r > 0$ incluye los números cuya distancia a c es menor que r : $|x - c| < r$. Sus extremos son $c - r$ y $c + r$; se escribe $(c - r, c + r)$. Un entorno reducido quita además el propio centro.

3.4.1 Del valor absoluto al intervalo, sin saltos

$|x - c| < r$ significa que x está a menos de r unidades de c , tanto por la izquierda como por la derecha. Por eso $c - r < x < c + r$. Si la condición es $\leq$, entran los extremos. Para $|x - c| > r$, buscas los puntos de fuera: $x < c - r$ o $x > c + r$.

3.4.2 Cuando la intersección queda vacía o es un solo punto

$(0, 2) \cap [2, 4] = \emptyset$: el único contacto posible es 2, pero no entra en el primer intervalo. En cambio, $[0, 2] \cap [2, 4] = \{2\}$. No confundas el conjunto vacío con el conjunto que solo contiene cero: $\emptyset$ y $\{0\}$ son diferentes.

3.5 Ejemplos resueltos

3.5.1 Dos extremos independientes

Para $-2 \leq x < 4$, -2 entra porque aparece $\leq$; 4 no entra porque aparece $<$. La notación es $[-2, 4)$.
En el dibujo: círculo lleno en -2 , vacío en 4 y tramo marcado entre ambos.

3.5.2 Unión e intersección

Sea $A = [-2, 3)$ y $B = (1, 5]$.

1. Coinciden desde después de 1 hasta antes de 3: $A \cap B = (1, 3)$.
2. 1 no entra en B y 3 no entra en A: los dos extremos de la intersección son abiertos.
3. Entre los dos conjuntos no queda un hueco. $A \cup B = [-2, 5]$.
4. -2 entra en A y 5 entra en B: ambos extremos de la unión están incluidos.

3.5.3 Un entorno y su versión reducida

1. $|x - 3| < 2$ tiene centro 3 y radio 2.
2. Los extremos son $3 - 2 = 1$ y $3 + 2 = 5$.
3. Entorno: $(1, 5)$.
4. Si se excluye el centro, escribe $(1, 3) \cup (3, 5)$.

3.5.4 Fuera de una zona

$|x + 1| \geq 3$ es $|x - (-1)| \geq 3$. El centro es -1 y los límites son -4 y 2 . Como la distancia debe ser al menos 3, la solución es $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$.

3.6 Esquema de repaso

- Corchete: entra. Paréntesis: no entra.
- Unión: una condición o la otra. Intersección: ambas.
- Con infinito, siempre paréntesis.
- $|x - c| < r \rightarrow (c - r, c + r)$, para $r > 0$.

3.7 Práctica del bloque

Intenta primero y comprueba después en Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores E01-E70 coinciden con la relación completa.

E21 / Básico

Escribe $-3 < x \leq 2$ como intervalo e indica qué extremos entran.

E24 / Consolidación

Para $A = [-1, 4]$ y $B = (2, 6)$, calcula $A \cap B$ y $A \cup B$.

E26 / Consolidación

Calcula $(0, 3) \cap [3, 7]$.

E29 / Reto

Calcula $[0, 5] \cap ((-\infty, 2) \cup (4, +\infty))$.

THE OPEN FILE

4. Potencias, raíces y radicales

Objetivo: Operar con potencias y radicales, simplificar y racionalizar justificando cada transformación.

4.1 Potencias: las reglas cuentan factores

a^n , con n natural positivo, significa multiplicar n copias de a . Al multiplicar potencias de la misma base juntamos sus factores; por eso se suman exponentes. Al elevar una potencia a otra se repite cada grupo; por eso los exponentes se multiplican.

Regla	Condición y ejemplo
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Misma base: $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$.
$a^m/a^n = a^{m-n}$	$a \neq 0$: $2^3/2^5 = 2^{-2} = 1/4$.
$(a^m)^n = a^{mn}$	Con exponentes enteros donde la expresión esté definida: $(2^3)^2 = 2^6$.
$a^0 = 1$; $a^{-n} = 1/a^n$	$a \neq 0$. Un exponente negativo indica inverso, no número negativo.

El signo y los paréntesis importan: $(-2)^2 = 4$, pero $-2^2 = -(2^2) = -4$. En el segundo caso la potencia afecta al 2 y el menos queda fuera.

4.2 Qué significa una raíz

$\sqrt{a}$ es el número no negativo cuyo cuadrado es a , para $a \geq 0$. Por ejemplo, $\sqrt{25} = 5$. La ecuación $x^2 = 25$ tiene dos soluciones, 5 y -5, pero el símbolo $\sqrt{25}$ representa solo 5. En las raíces de índice par el radicando debe ser no negativo para trabajar en los reales. Con índice impar también puedes usar negativos: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Para $a > 0$: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, con n entero positivo

En esta fórmula el exponente es la fracción m/n completa: $a^{m/n}$. Si el exponente es negativo, además aparece el inverso. Para evitar ambigüedades con bases negativas y fracciones, aplicaremos las reglas de exponentes fraccionarios con base positiva.

4.3 Simplificar: sacar grupos completos

Para una raíz cuadrada, cada pareja de factores iguales puede salir como un factor. $\sqrt{72} = \sqrt{(36 \cdot 2)} = 6\sqrt{2}$. Para una raíz cúbica, necesitas grupos de tres: $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{(27 \cdot 2)} = 3\sqrt[3]{2}$. El factor que queda dentro no se borra.

4.4 Sumar y multiplicar son operaciones diferentes

Solo sumas radicales semejantes: mismo índice y mismo radicando después de simplificar. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. En cambio, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ no se convierte en $\sqrt{5}$. Para multiplicar raíces cuadradas con radicandos no negativos: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Para dividir las exige además $b > 0$.

4.5 Racionalizar: cambiar la forma, no el valor

Racionalizar consiste en escribir una fracción equivalente sin raíz en el denominador. Multiplica arriba y abajo por el mismo factor no nulo. Si hay un binomio, usa su conjugado: $a + b$ y $a - b$ cumplen $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

4.5.1 Tres errores que debes detectar

- $\sqrt{a + b}$ no suele ser $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Comprueba con $a = 9$ y $b = 16$: $\sqrt{25} = 5$, pero $3 + 4 = 7$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$, no siempre x .
- No cambies exponentes por coeficientes: $2\sqrt{3}$ no es $\sqrt{6}$; equivale a $\sqrt{12}$.

Simplificar antes de sumar

1 / Busca un cuadrado completo: $72 = 36 \cdot 2$
El 36 sí tiene una raíz entera.

2 / Separa el producto: $\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2}$
La regla separa productos de radicandos no negativos, no sumas.

3 / Saca la raíz exacta: $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$
Ahora puedes reunirlos con otros múltiplos de $\sqrt{2}$.

Simplificar antes de sumar

4.6 Ejemplos resueltos

4.6.1 Potencia de exponente fraccionario

1. $16^{3/4} = ({}^4\sqrt{16})^3$.
2. ${}^4\sqrt{16} = 2$ porque $2^4 = 16$.
3. $2^3 = 8$.

4.6.2 Simplificar antes de sumar

1. Calcula $\sqrt{72} - 2\sqrt{8} + \sqrt{18}$.
2. $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$; $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
3. Sustituye sin perder el 2 que multiplica: $6\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$.
4. Suma los coeficientes: $(6 - 4 + 3)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

4.6.3 Un denominador con una raíz

1. Para $3/\sqrt{5}$, multiplica arriba y abajo por $\sqrt{5}$.
2. $(3\sqrt{5})/(\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}) = 3\sqrt{5}/5$.
3. El valor es el mismo porque has multiplicado por $\sqrt{5}/\sqrt{5} = 1$.

4.6.4 Un denominador con dos términos

1. Para $2/(\sqrt{3} - 1)$, el conjugado es $\sqrt{3} + 1$.
2. Multiplica: $2(\sqrt{3} + 1)/[(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)]$.
3. Denominador: $(\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$.
4. Cancela el factor 2: queda $\sqrt{3} + 1$.
5. Comprueba: $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 2$.

4.7 Esquema de repaso

- Misma base al multiplicar $\rightarrow$ suma exponentes.
- Exponente negativo $\rightarrow$ inverso.
- Simplifica radicales antes de comprobar si son semejantes.
- Racionaliza multiplicando numerador y denominador por el mismo factor.

4.8 Práctica del bloque

Intenta primero y comprueba después en Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores E01-E70 coinciden con la relación completa.

E31 / Básico

Calcula $2^3 \cdot 2^{-5}$.

E34 / Consolidación

Simplifica $2\sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{75}$.

E36 / Consolidación

Racionaliza $5/\sqrt{2}$.

E39 / Reto

Calcula $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ mostrando los productos.

THE OPEN FILE

5. Aproximaciones y control del error

Objetivo: Redondear, truncar y evaluar qué precisión tiene una aproximación.

5.1 Aproximar es reemplazar un valor por otro cercano

En un cálculo puedes necesitar una forma exacta, como $\sqrt{2}$, o una aproximación decimal, como 1,414. Son dos respuestas diferentes. El número de cifras que conserves depende del uso y de la precisión que te pidan.

5.2 Truncar y redondear, con un criterio claro

Para truncar a n decimales, elimina las cifras posteriores sin cambiar las anteriores. Para redondear, observa la primera cifra que eliminas: si es menor que 5, mantén; si es 5 o mayor, aumenta en una unidad la última cifra conservada en el valor absoluto y después recupera el signo. Usaremos esa convención escolar, que en los empates redondea alejándose de cero.

Número	Truncado a dos decimales	Redondeado a dos decimales
3,146	3,14	3,15
3,141	3,14	3,14
-3,146	-3,14	-3,15
2,995	2,99	3,00

La escritura 3,00 indica que hemos redondeado a centésimas. Aunque vale lo mismo que 3, comunica la precisión con la que se presenta el resultado.

Un decimal: 1,4

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

Dos decimales: 1,41

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

Tres decimales: 1,414

Valor exacto: $\sqrt{2}$

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

Cada cifra afina la aproximación.

Zoom numérico: cotas sucesivas de $\sqrt{2}$. Las cajas indican intervalos, no una escala geométrica.

5.3 Error absoluto: cuánto te has separado

$$E_a = |\text{valor exacto} - \text{aproximación}|$$

Si el valor real es 80 y usas 78, el error absoluto es $|80 - 78| = 2$. Tiene las mismas unidades que la magnitud: si hablamos de centímetros, son 2 cm. No escribas un error negativo.

5.4 Error relativo: compara el error con el tamaño del valor

$$E_r = E_a / |\text{valor exacto}|, \text{ si el valor exacto no es } 0$$

En el ejemplo, $2/80 = 0,025$. Para expresarlo como porcentaje, multiplica por 100: 2,5 %. Este cociente permite comparar aproximaciones de magnitudes distintas. Un error de 2 cm es pequeño frente a 80 cm, pero muy grande frente a 4 cm. Si el valor exacto es cero, no se puede calcular el error relativo con esta fórmula.

5.5 Cotas: límites del error cuando no conoces todas las cifras

Al redondear a n decimales, el error absoluto es como máximo la mitad de una unidad de ese orden: $E_a \leq 0,5 \cdot 10^{-n}$. A centésimas, como máximo 0,005. Al truncar, $E_a < 10^{-n}$: a centésimas, menos de 0,01. Estas cotas no son el error exacto de cada caso: son límites que sabemos sin calcularlo.

5.5.1 Si una medida se da redondeada, ¿qué sabemos?

Si una longitud positiva se presenta como 12,3 cm redondeada a décimas con nuestra convención, su valor previo está en $[12,25; 12,35)$. El 12,25 redondea a 12,3, mientras el 12,35 redondea a 12,4. Un intervalo con ; separa los extremos cuando llevan comas decimales. No confundas esto con conocer la longitud exacta.

5.5.2 No redondees cada paso sin necesidad

Conserva cifras adicionales durante las operaciones y redondea al final según lo pedido. Si sustituyes muy pronto cada valor por un decimal corto, puedes acumular diferencias. Una calculadora tampoco convierte una aproximación en una igualdad exacta.

5.6 Ejemplos resueltos

5.6.1 Redondeo con acarreo

1. Redondea 2,995 a centésimas. Conservas inicialmente 2,99.
2. La tercera cifra decimal es 5, así que hay que aumentar la última cifra conservada.
3. $9 + 1$ obliga a llevar una unidad a la cifra anterior, que también es 9.
4. Resultado: 3,00. No escribas 2,910.

5.6.2 Dos formas de expresar el error

1. Un valor exacto de 250 g se aproxima por 248 g.
2. $E_a = |250 - 248| = 2$ g.
3. $E_r = 2/250 = 0,008$.
4. Porcentaje: $0,008 \cdot 100 = 0,8$ %.

5.6.3 Error de una aproximación irracional

Si aproximas $\sqrt{2}$ por 1,414, el error exacto es $\sqrt{2} - 1,414$, porque $\sqrt{2}$ es mayor que 1,414. Su valor decimal es aproximadamente 0,00021356. El error relativo es $(\sqrt{2} - 1,414)/\sqrt{2} \approx 0,00015101$, aproximadamente 0,0151 %. Esas cifras del error también son aproximaciones.

5.6.4 Una cota suficiente

Si redondeas cualquier real a tres decimales, $E_a \leq 0,0005$. No necesitas saber qué número era para dar esa cota. Para garantizar un error estrictamente menor que 0,001 basta redondear a tres decimales.

5.7 Esquema de repaso

- Truncar: corta. Redondear: mira la primera cifra descartada.
- E_a = distancia al valor exacto; incluye unidades.
- $E_r = E_a/|\text{exacto}|$; para porcentaje, multiplica por 100.
- Distingue el error real de una cota máxima.

5.8 Práctica del bloque

Intenta primero y comprueba después en Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores E01-E70 coinciden con la relación completa.

E41 / Básico

Trunca y redondea 7,386 a centésimas.

E44 / Consolidación

Un valor exacto de 125 g se aproxima por 124 g. Calcula los errores absoluto y relativo y el porcentaje.

E46 / Consolidación

Redondea 9,995 a centésimas y explica el acarreo.

E49 / Reto

¿Cuántos decimales como mínimo garantizan un error menor que 0,0001 al redondear?

THE OPEN FILE

6. Notación científica

Objetivo: Escribir magnitudes extremas y operar controlando el exponente y la normalización.

6.1 Dos partes que hacen trabajos distintos

$a \cdot 10^n$, con $1 \leq |a| < 10$ y n entero

El coeficiente a conserva las cifras importantes; la potencia de 10 indica la escala. Para números positivos, el coeficiente está entre 1, incluido, y 10, excluido. En un número negativo, se conserva el menos y se aplica la condición al valor absoluto. Cero se escribe 0: no tiene una forma normalizada con coeficiente de módulo entre 1 y 10.

$4,2 \cdot 10^5 = 420\,000$. El exponente positivo corresponde a multiplicar por 100 000. $4,2 \cdot 10^{-5} = 0,000042$. El exponente negativo divide por 100 000. Un exponente negativo no convierte el número en negativo.

6.2 Convertir un decimal, contando el desplazamiento

1. Mueve la coma hasta obtener un coeficiente cuyo módulo esté entre 1 y 10.
2. Cuenta cuántas posiciones has movido.
3. Si el número original tenía módulo grande y moviste la coma a la izquierda, el exponente es positivo.
4. Si el módulo original era menor que 1 y moviste la coma a la derecha, el exponente es negativo.
5. Comprueba reconstruyendo el número.

6.3 Multiplicar y dividir

Multiplica o divide los coeficientes y aplica las reglas de potencias de 10. En productos suma exponentes; en cocientes resta el exponente del denominador al del numerador. Después comprueba si el coeficiente queda normalizado: el primer resultado puede no cumplir todavía la condición.

6.4 Sumar y restar: primero iguala la escala

No puedes sumar los coeficientes si los exponentes son distintos. Escribe las cantidades con la misma potencia de 10, opera los coeficientes y normaliza al final. Es la misma idea que sumar cantidades expresadas en una unidad común.

6.4.1 Cómo normalizar sin cambiar el valor

$18 \cdot 10^6 = 1,8 \cdot 10^7$: al dividir el coeficiente entre 10, multiplicas la potencia por 10. En cambio, $0,4 \cdot 10^6 = 4 \cdot 10^5$: al multiplicar el coeficiente por 10, reduces el exponente una unidad. Los dos cambios deben compensarse.

6.4.2 Unidades y cifras finales

Si multiplicas una rapidez en m/s por tiempo en s, obtienes metros. Si cambias de m a km, divide entre 1000. Una operación correcta con exponentes puede dar una respuesta mal expresada si olvidas las unidades. Sigue la precisión que pida el enunciado; si no la especifica, conserva el resultado exacto de los datos proporcionados.

Una escala común para poder sumar

$$3,2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4$$

Los exponentes son diferentes: todavía no sumes coeficientes.

$$3,2 \cdot 10^5 + 0,4 \cdot 10^5$$

$4 \cdot 10^4$ y $0,4 \cdot 10^5$ representan el mismo número.

$$(3,2 + 0,4) \cdot 10^5 = 3,6 \cdot 10^5$$

El resultado ya tiene coeficiente entre 1 y 10.

Una escala común para poder sumar

6.5 Ejemplos resueltos

6.5.1 Número pequeño

1. 0,000072 pasa a 7,2 moviendo la coma cinco posiciones a la derecha.
2. El número original es menor que 1: exponente -5.
3. $0,000072 = 7,2 \cdot 10^{-5}$.
4. Reconstruye: $7,2/100\ 000 = 0,000072$.

6.5.2 Producto y normalización

1. $(6 \cdot 10^4)(3 \cdot 10^{-2})$.
2. Coeficientes: $6 \cdot 3 = 18$. Exponentes: $4 + (-2) = 2$.
3. Primer resultado: $18 \cdot 10^2$.
4. Normalizado: $1,8 \cdot 10^3$.

6.5.3 Una suma con escalas distintas

1. $3,2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4$.
2. Convierte el segundo sumando: $4 \cdot 10^4 = 0,4 \cdot 10^5$.
3. Suma: $(3,2 + 0,4) \cdot 10^5 = 3,6 \cdot 10^5$.

6.5.4 Rapidez y tiempo

Un objeto viaja a $2,5 \cdot 10^3$ m/s durante $4 \cdot 10^2$ s. Distancia = rapidez · tiempo = $(2,5 \cdot 4) \cdot 10^5$ m = $10 \cdot 10^5$ m = $1 \cdot 10^6$ m = 1000 km. La conversión final divide entre 10^3 .

6.6 Esquema de repaso

- Coeficiente normalizado: $1 \leq |a| < 10$.
- Producto: suma exponentes. Cociente: resta exponentes.
- Suma: iguala las potencias primero.
- Normaliza y comprueba unidades al final.

6.7 Práctica del bloque

Intenta primero y comprueba después en Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores E01-E70 coinciden con la relación completa.

E51 / Básico

Escribe 5 600 000 en notación científica normalizada.

E54 / Consolidación

Calcula $(4 \cdot 10^6)(3 \cdot 10^{-4})$ y normaliza.

E56 / Consolidación

Suma $2,4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4$.

E59 / Reto

Una señal viaja a $3 \cdot 10^8$ m/s durante $2,4 \cdot 10^{-3}$ s. Calcula distancia en m y km.

7. Logaritmos

Objetivo: Interpretar un logaritmo como exponente y aplicar sus propiedades con las condiciones correctas.

7.1 Una operación que pregunta por el exponente

En $2^3 = 8$, la base es 2, el exponente es 3 y el resultado es 8. El logaritmo plantea la pregunta inversa: «¿A qué exponente tengo que elevar 2 para obtener 8?». La respuesta se escribe $\log_2 8 = 3$.

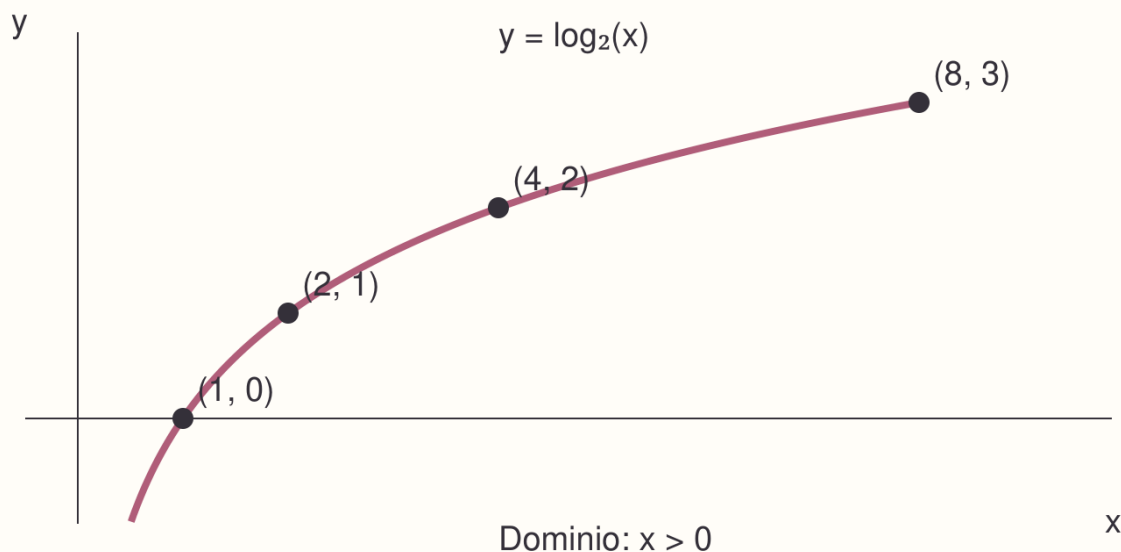
$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$$

Para logaritmos reales, la base debe cumplir $b > 0$ y $b \neq 1$, y el argumento a debe ser positivo. El argumento es el número del que calculas el logaritmo; no lo confundas con el resultado. El resultado sí puede ser cero o negativo.

Potencia	Logaritmo	Interpretación
$3^2 = 9$	$\log_3 9 = 2$	El exponente necesario es 2.
$5^0 = 1$	$\log_5 1 = 0$	Cualquier base permitida elevada a cero vale 1.
$2^{-3} = 1/8$	$\log_2 (1/8) = -3$	Un argumento pequeño puede dar un logaritmo negativo.
$9^{1/2} = 3$	$\log_9 3 = 1/2$	El exponente también puede ser una fracción.

7.2 Calcula reconociendo una potencia

Reescribe el argumento como potencia de la base: si $125 = 5^3$, entonces $\log_5 125 = 3$. Si $1/25 = 5^{-2}$, entonces $\log_5 (1/25) = -2$. Si no ves una potencia sencilla, el resultado no tiene por qué ser un entero.



Gráfica de $y = \log_2(x)$: 1, 2, 4 y 8 necesitan exponentes 0, 1, 2 y 3. No existe para $x \leq 0$ en los reales.

7.3 Las propiedades vienen de las reglas de las potencias

Propiedad	Condiciones
$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$	$x > 0$, $y > 0$; base $b > 0$ y $b \neq 1$.
$\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$	Las mismas condiciones.
$\log_b(x^r) = r \log_b x$	$x > 0$; base permitida.
$\log_b x = \log_k x / \log_k b$	$x > 0$; b y k son bases permitidas.

Una suma dentro del argumento no tiene una regla equivalente: $\log(x + y)$ no es $\log x + \log y$. Las propiedades separan productos, cocientes y potencias, siempre bajo sus condiciones.

7.4 Base 10 y base e

En esta unidad, $\log x$ sin subíndice significa logaritmo decimal, de base 10. $\ln x$ es el logaritmo natural, de base e . e es un real positivo aproximadamente igual a 2,71828. Comprueba qué tecla usa tu calculadora: LOG y LN no son la misma base. Para cualquier otra base puedes utilizar el cambio de base.

7.4.1 Por qué la base 1 no sirve y el argumento no puede ser negativo

1 elevado a cualquier exponente sigue dando 1: no permite obtener otros argumentos ni determinar un exponente único para 1. Con una base positiva, todas sus potencias reales son positivas, así que no obtendrás 0 ni un argumento negativo. Eso no impide exponentes negativos: $2^{-1} = 1/2$ es positivo.

7.4.2 Si la base está entre 0 y 1

Las reglas siguen siendo válidas. Por ejemplo, $(1/2)^3 = 1/8$, de modo que $\log_{1/2}(1/8) = 3$. En esas bases, al aumentar el argumento disminuye el logaritmo. No uses la intuición de las bases mayores que 1 sin comprobar la base.

7.4.3 Una ecuación sencilla: comprueba el dominio antes de dar la solución

$\log_2(x - 1) = 3$ exige $x - 1 > 0$, es decir, $x > 1$. Pasar a potencia da $x - 1 = 8$, luego $x = 9$. Como $9 > 1$, es válida. Si una transformación produce un valor fuera del dominio, debes descartarlo.

7.5 Ejemplos resueltos

7.5.1 Un logaritmo negativo

1. Calcula $\log_3(1/27)$.
2. $27 = 3^3$; su inverso es 3^{-3} .
3. Por tanto, $\log_3(1/27) = -3$.
4. Comprueba: $3^{-3} = 1/27$.

7.5.2 Producto y cociente

$\log_2(32 \cdot 4/8) = \log_2 32 + \log_2 4 - \log_2 8 = 5 + 2 - 3 = 4$. Comprueba primero el argumento: $32 \cdot 4/8 = 16$ y $2^4 = 16$.

7.5.3 Una propiedad que no existe

$\log_2(8 + 8) = \log_2 16 = 4$. Sin embargo, $\log_2 8 + \log_2 8 = 3 + 3 = 6$. Los resultados distintos muestran que no se puede separar una suma de ese modo.

7.5.4 Cambio de base

$\log_2 7 = \log 7 / \log 2 \approx 2,8074$. La respuesta decimal es aproximada: $2^{2,8074}$ es aproximadamente 7. Puedes usar $\ln 7 / \ln 2$ y obtener el mismo resultado si no redondeas demasiado pronto.

7.6 Esquema de repaso

- El logaritmo devuelve un exponente.
- Base positiva y distinta de 1; argumento positivo.
- Producto $\rightarrow$ suma; cociente $\rightarrow$ resta; potencia $\rightarrow$ factor.
- $\log(x + y)$ no se separa; verifica el dominio en ecuaciones.

7.7 Práctica del bloque

Intenta primero y comprueba después en Soluciones_70_ejercicios.pdf. Los identificadores E01-E70 coinciden con la relación completa.

E61 / Básico

Calcula $\log_2 32$.

E64 / Consolidación

Calcula $\log_3(1/81)$.

E66 / Consolidación

Calcula $\log_2(16 \cdot 8/4)$ separando producto y cociente.

E69 / Reto

Demuestra con valores que $\log_2(4 + 4)$ no es $\log_2 4 + \log_2 4$.

THE OPEN FILE

8. Conexiones y aplicación

8.1 Mapa de conexiones

Herramienta	Conecta con	Pregunta útil
Clasificación	Formas exactas y aproximadas	¿Es el número original o un decimal que lo aproxima?
Recta y distancia	Intervalos y entornos	¿Qué puntos cumplen la condición?
Potencias y raíces	Notación científica y logaritmos	¿Puedo reescribirlo como una potencia?
Aproximación	Medidas y resultados	¿Qué error estoy aceptando?

8.2 Tres retos de razonamiento

1 • Encuentra un racional entre dos irracionales

Busca uno entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. Pista: los cuadrados ayudan. Solución: $3/2 = 1,5$, porque $2 < (3/2)^2 = 9/4 < 3$. Como todos son positivos, $\sqrt{2} < 3/2 < \sqrt{3}$.

2 • Repara una operación falsa

Alguien escribe $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{25}$. La izquierda vale $3 + 4 = 7$ y la derecha vale 5. La regla de multiplicar radicales no permite juntar una suma dentro de una raíz.

3 • ¿La intersección contiene el punto de contacto?

Compara $(-1, 2] \cap [2, 5)$ con $(-1, 2) \cap [2, 5)$. La primera es $\{2\}$; la segunda es $\emptyset$. En el segundo caso, el primer intervalo excluye el 2.

8.3 Proyecto · Una etiqueta con precisión

Una placa cuadrada tiene un lado de 12 cm. Una etiqueta describe su diagonal como 17,0 cm y admite un error relativo inferior al 0,5 %. Decide si la etiqueta cumple el requisito y explica tu respuesta.

1. Obtén la diagonal exacta usando Pitágoras.
2. Calcula una aproximación para comparar con la etiqueta.
3. Determina el error absoluto y el error relativo de 17,0 cm.
4. Expresa el resultado como porcentaje.
5. Redacta qué es exacto, qué es aproximado y si se acepta la etiqueta.

8.3.1 Solución razonada

$d = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2} \text{ cm} \approx 16,97056275 \text{ cm}$. $E_a = |17 - 12\sqrt{2}| \approx 0,02943725 \text{ cm}$. $E_r = |17 - 12\sqrt{2}|/(12\sqrt{2}) \approx 0,00173461$, es decir, aproximadamente 0,17346 %. Como es menor que 0,5 %, cumple. El decimal 17,0 es la etiqueta aproximada; $12\sqrt{2}$ es el valor exacto del modelo geométrico.

8.4 Cómo seguir practicando

Trabaja los 70 ejercicios por niveles y utiliza los diez exámenes con sus soluciones separadas. Cada prueba tiene ocho preguntas y suma 10 puntos. El tiempo orientativo es de 55 minutos; analiza el primer paso que haya causado cada error.

Contenido y actividades originales de The Open File. Las situaciones aplicadas son ejemplos ficticios.

